



# Statistiques spatiales des cavités chaotiques ouvertes : Applications aux cavités électromagnétiques

Jean-Baptiste Gros

## ► To cite this version:

Jean-Baptiste Gros. Statistiques spatiales des cavités chaotiques ouvertes : Applications aux cavités électromagnétiques. Physique [physics]. Université Nice Sophia Antipolis, 2014. Français. NNT : . tel-01159009

**HAL Id: tel-01159009**

**<https://theses.hal.science/tel-01159009>**

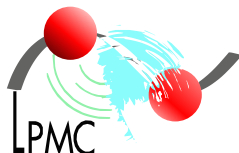
Submitted on 2 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives| 4.0  
International License



## THÈSE

Présentée à

**L'UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS**

École Doctorale : Sciences Fondamentales et Appliquées

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

dans la spécialité : **PHYSIQUE**

par

**Jean-Baptiste GROS**

# Statistiques Spatiales Des Cavités Chaotiques Ouvertes : Applications Aux Cavités Électromagnétiques

Soutenue le 19 décembre 2014 devant la commission composée de :

Elodie RICHALOT	Professeur, Université Paris-Est Marne-la-Vallée	<i>Président</i>
Philippe BESNIER	Directeur de Recherche, CNRS	<i>Rapporteur</i>
Olivier LEGRAND	Professeur, Université Nice Sophia Antipolis	<i>Directeur</i>
Geoffroy LEROSEY	Chargé de recherche, CNRS	
Fabrice MORTESSAGNE	Professeur, Université Nice Sophia Antipolis	<i>Co-Directeur</i>
Denis ULLMO	Directeur de Recherche, CNRS	<i>Rapporteur</i>
Hans-Jürgen STÖCKMANN	Professeur, Philipps-Universität Marburg	<i>Membre invité</i>

à 11 heures au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>1 Problématique des CRBM, vers une CR chaotique</b>	<b>13</b>
1.1 Les chambres réverbérantes pour les tests de compatibilité électromagnétique . . . . .	14
1.2 Cavity électromagnétique chaotique : comportement universel prédit par les matrices aléatoires . . . . .	28
1.3 Vers une CRBM chaotique . . . . .	48
<b>2 Construire et caractériser une chambre réverbérante chaotique</b>	<b>51</b>
2.1 Les quantités statistiques de la TMA comme sonde de la chaoticité d'une CR . . . . .	52
2.2 D'une CR régulière à une CR complètement chaotique . . . . .	54
2.2.1 Une modification trop simple. . . . .	55
2.2.2 Un bon compromis . . . . .	61
2.2.3 Distribution spatiale des champs propres . . . . .	63
2.3 Application à une CR commerciale (ESYCOM) -modélisation numérique .	66
<b>3 Modélisation des pertes par la TMA - Le formalisme de l'hamiltonien effectif pour les ondes scalaires</b>	<b>71</b>
3.1 Cavity EM en présence de pertes : modélisation et généralités . . . . .	72

---

3.1.1	Système ouvert : un problème de diffusion . . . . .	73
3.1.2	Réponse d'un système ouvert et hamiltonien effectif . . . . .	78
3.1.3	Pertes homogènes et Pertes inhomogènes : un nombre différent de canaux . . . . .	80
3.1.4	Sensibilité des champs propres aux pertes : <i>phase rigidity</i> et paramètre de complexité . . . . .	82
3.2	$\mathcal{H}_{\text{eff}}$ et TMA : des statistiques universelles pour les cavités chaotiques présentant des pertes . . . . .	85
3.2.1	Modéliser les cavités chaotiques présentant des pertes par des matrices aléatoires . . . . .	86
3.2.2	Distribution spatiale de l'intensité des champs propres . . . . .	87
3.2.3	Le régime de couplage faible . . . . .	92
3.2.4	Au delà du couplage faible . . . . .	98
3.2.5	Distribution spatiale de l'intensité de la réponse d'une cavité chaotique ouverte . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Statistiques universelles des chambres réverbérantes chaotiques à pertes</b>	<b>107</b>
4.1	CR chaotique expérimentale . . . . .	109
4.1.1	Description du dispositif expérimental . . . . .	110
4.1.2	Vérification de la chaoticité de la CR . . . . .	111
4.1.3	Recouvrement modal moyen et facteur de qualité moyen . . . . .	112
4.2	Modéliser la réponse d'une CR en présence de pertes . . . . .	114
4.2.1	Introduire les pertes . . . . .	114
4.2.2	Réponse d'une CR et tenseur de Green dyadique . . . . .	115
4.3	Adapter le formalisme de l'hamiltonien effectif aux cavités EM 3D (champs vectoriels) . . . . .	118



---

4.3.1	Condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels . . . .	118
4.3.1.1	Condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels : définition et propriétés . . . . .	119
4.3.1.2	Condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels : vérification numérique . . . . .	120
4.3.2	<i>Phase rigidity</i> et paramètre de complexité d'un champ vectoriel . .	122
4.3.3	Les prédictions de la TMA pour les cavités EM 3D chaotiques avec des pertes . . . . .	124
4.3.3.1	Distribution du paramètre de complexité, de la <i>phase rigidity</i> , et des composantes cartésiennes . . . . .	124
4.3.3.2	Distribution de la norme des champs propres vectoriels d'une CR chaotique . . . . .	126
4.3.3.3	Vérification numérique . . . . .	127
4.4	Statistiques spatiales universelles de la réponse électromagnétique d'une CR chaotique . . . . .	133
4.4.1	Statistique des éléments du TGD . . . . .	134
4.4.2	Prédire la distribution d'un ensemble de réponses d'une CR chaotique : le recouvrement modal comme seul paramètre . . . . .	138
4.4.3	Distribution de la réponse dans une CR chaotique expérimentale . .	141
4.5	Une CR commerciale et sa version chaotique : des comportements très différents . . . . .	143
4.5.1	Distribution d'intensité des composantes de la réponses . . . . .	144
4.5.2	Critère d'uniformité de la norme internationale . . . . .	147
4.5.2.1	Étude numérique . . . . .	147
4.5.2.2	Étude expérimentale . . . . .	149

## 5 Étude paramétrique expérimentale des résonances complexes des cavités

---

<b>chaotiques</b>	<b>153</b>
5.1 Mise en contexte . . . . .	154
5.2 Perturbations locales ou perturbations globales : Les éléments théoriques .	156
5.3 Cavités EM bi-dimensionnels : Expériences avec des champs scalaires . . .	160
5.4 Chambres réverbérantes électromagnétiques : Expériences et Simulations avec des champs vectoriels. . . . .	163
<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
<b>A Dérivation du <i>Wigner Surmise</i></b>	<b>183</b>
<b>B Corrélation à deux points pour les matrices GOE</b>	<b>187</b>
<b>C Rappels sur la représentation spatiale des opérateurs</b>	<b>189</b>
<b>D Nombre de canaux liés à des pertes par absorption</b>	<b>191</b>
D.1 Absorption par une surface $S$ . . . . .	192
D.2 Absorption sur une longueur $L$ . . . . .	193
<b>Résumés</b>	<b>194</b>

# Table des figures

1.1	Test de CEM en chambres réverbérantes . . . . .	16
1.2	Exemples de champs 2D statistiquement uniformes et isotropes .	17
1.3	Différents régimes de recouvrement modal . . . . .	18
1.4	Exemple de réponse proche de la LUF qui n'est ni statistiquement uniforme ni isotrope . . . . .	26
1.5	Illustration de l'unfolding et de l'ergodicité . . . . .	37
1.6	Distribution des écarts entre plus proches voisins . . . . .	40
1.7	Exemple de $P(S)$ autre que GOE . . . . .	41
1.8	Rigidité spectrale . . . . .	43
1.9	Distribution des composantes des vecteurs propres . . . . .	46
1.10	Exemple de modes non-génériques de type <i>bouncing ball</i> dans un billard de Sinaï 2D . . . . .	47
2.1	Modification simple d'une CR régulière parallélépipédique . . . .	55
2.2	Test de chaotité . . . . .	58
2.3	Contribution des TgM, $N^{\text{TgM}}$ , aux fluctuations de $\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\text{Weyl}}$ . . .	60
2.4	Une CR parallélépipédique rendue complètement chaotique . . .	61
2.5	Test de chaotité . . . . .	62
2.6	Statistique spatiale des champ propres . . . . .	65
2.7	D'une CR conventionnelle vers une CR chaotique. . . . .	67

---

2.8	CR conventionnelle rendue chaotique . . . . .	68
2.9	Distributions des composantes cartésiennes normalisées (2.19) des champs propres de la CR commerciale (a), et de la CR rendue chaotique (b). . . . .	69
2.10	Modes non-générique des deux CR chaotiques . . . . .	70
3.1	Illustration de la bi-orthogonalité des vecteurs propres. . . . .	89
3.2	Comparaison entre la distribution de la <i>phase rigidity</i> des vec- teurs propres de $H_{\text{eff}}(p_{\rho;e})$ et la prédiction de la TMA en régime de couplage faible ( $p_{\rho;\{M,d\}}$ ). . . . .	93
3.3	Distribution d'intensité normalisée d'un ensemble de vecteurs propres en régime de couplage faible . . . . .	95
3.4	Comparaison entre la distribution des largeurs des résonances renormalisés et les prédictions de la TMA en régime de couplage faible. . . . .	96
3.5	Distribution des largeurs (a) et de la <i>phase rigidity</i> (b) . . . . .	98
3.6	Distribution d'intensité d'un ensembles de vecteurs propres hors du régime de couplage faible. . . . .	100
3.7	Illustration de la non équivalence entre la distribution de la <i>phase rigidity</i> d'un ensemble de réponses et celle des vecteurs propres associés. . . . .	102
3.8	Distributions d'intensité normalisée d'un ensembles de réponses $\mathcal{G}(\varepsilon)$ . . . . .	104
4.1	Vue d'artiste 3D de la CR chaotique expérimentale. . . . .	109
4.2	NNSD expérimentale . . . . .	111
4.3	Introduction des pertes dans la CR conventionnelle idéale rendue chaotique et présentée dans la Figure 2.8 . . . . .	114

---

4.4	Effet de la normalisation (4.14) et champs propres bi-orthogonaux (4.15). . . . .	121
4.5	Distribution des largeurs réduites $\gamma_n$ . . . . .	128
4.6	Distribution de la <i>phase rigidity</i> des champs propres vectoriels de la CR chaotique montrée dans la Figure 4.3 . . . . .	129
4.7	Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de champs propres. . . . .	130
4.8	Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de champs propres après retrait des modes non génériques . . . . .	131
4.9	Distribution d'intensité normalisée $\tilde{I}_n =   \vec{\mathcal{E}}_n  ^2 / \langle   \vec{\mathcal{E}}_n  ^2 \rangle$ d'un en- semble de champs propres après retrait des modes non génériques	132
4.10	Écarts relatifs aux distributions attendues dans un système fermé.	133
4.11	Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de $30 \times 300 \times 3$ réponses calculées dans la CR chao- tique Figure 4.3. . . . .	136
4.12	Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de réponses après retrait des réponses non statis- tiquement uniformes ni isotropes . . . . .	137
4.13	Distribution spatiale de la réponses dans la CR chaotique. . . . .	137
4.14	Prédiction TMA de la distribution de la <i>phase rigidity</i> des ré- ponses de la CR chaotique 4.3. . . . .	138
4.15	Prédiction TMA de la distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de réponses . . . . .	139

---

4.16	Comparaison de la distribution d'intensité des réponses de la CR chaotique (Figure 4.3) avec la prédiction TMA $P^{\{d\}}$ et les distribution attendues dans un système complètement fermé ( $\chi_3^2$ ), et dans un système complètement ouvert ( $\chi_6^2$ ) . . . . .	140
4.17	Distribution d'intensité normalisée d'un ensemble de réponses mesurées dans la CR expérimentale chaotique . . . . .	142
4.18	Comparaison des distributions d'intensité normalisée des composantes du champ électrique entre CR conventionnelle et CR chaotique. (a) Résultats numériques.(b) Résultats expérimentaux. . . . .	144
4.19	Deux réponses typiques, manifestement non ergodiques, dans la CR conventionnelle. . . . .	145
4.20	Fluctuations des maxima en dB en fonction de la fréquence de mesure . . . . .	147
4.21	Histogrammes des valeurs de $\sigma_{dB}$ obtenues pour 8, 16 et 64 points de mesure . . . . .	148
4.22	Histogrammes des valeurs de $\sigma_{dB}$ obtenues expérimentalement dans la CR chaotique et sa version conventionnelle. . . . .	150
4.23	Histogrammes des valeurs de $\sigma_{dB}$ obtenues numériquement (via le TGD) dans la CR conventionnelle et sa version chaotique . . . .	150
5.1	Dispositif expérimentaux et dépendances paramétriques . . . . .	158
5.2	Distribution des vitesses de largeur normalisées expérimentales $y$ pour les trois systèmes correspondant à la Figure 5.1 . . . . .	162
5.3	Distribution des vitesses de largeur pour plusieurs configurations de la CR chaotique montrée en insert . . . . .	164
B.1	Figures provenant de la référence [1]. À gauche : $Y_{2_{GOE}}$ . À droite : $b_{2_{GOE}}(t)$ . . . .	187

# Introduction générale

Cette thèse traite de problèmes de diffusion d'ondes en milieu complexe. Plus précisément, elle s'intéresse aux statistiques spatiales et spectrales des cavités chaotiques électromagnétiques ouvertes, c'est-à-dire présentant des pertes. Ces systèmes possèdent des comportements statistiques universels décrits et modélisés de manière très précise grâce au formalisme de l'hamiltonien effectif et à la théorie des matrices aléatoires, tout deux originellement introduits dans le contexte de la physique nucléaire. Grâce à l'équivalence formelle entre l'équation de Schrödinger et l'équation d'Helmholtz pour un champ scalaire, ce formalisme ne se limite pas aux seuls systèmes quantiques mais peut être étendu à d'autres systèmes ondulatoires, au rang desquels les cavités électromagnétiques quasi-bidimensionnelles, cavités pour lesquelles l'une des dimensions est petite devant la longueur d'onde. En effet, tant que cette dimension reste inférieure à la demi-longueur d'onde, seuls les modes transverses magnétiques d'ordre zéros peuvent se propager. Le champ électromagnétique dans ces cavités est donc entièrement décrit par la seule composante non-nulle du champ électrique et se comporte donc comme une onde scalaire. Ainsi, depuis le début des années 90, les cavités électromagnétiques quasi-bidimensionnelles sont devenues l'un des systèmes modèles dans lesquels les prédictions statistiques issues de la théorie des matrices aléatoires ont été intensément vérifiées. D'un point de vue plus appliqué, les cavités électromagnétiques sont couramment utilisées pour réaliser des tests dit de compatibilité électromagnétique sur des objets embarquant de l'électronique. Dans ce contexte, elles sont alors appelées chambre réverbérantes (éventuellement "à bras-

sages de modes" grâce à une pièce métallique disposée à l'intérieur et permettant d'en changer la configuration). Un des objectifs de cette thèse est de montrer comment, en considérant les chambres réverbérantes comme un système typique du chaos ondulatoire, on peut mieux maîtriser , et donc aussi améliorer, leur comportement. Pour remplir cet objectif, il est toutefois nécessaire de répondre à un certain nombre de questions de physique fondamentale. En effet, pour introduire dans une chambre réverbérante un objet à tester, les dimensions de celle-ci sont telles que la cavité ne peut plus être considérée comme quasi-bidimensionnelle. Ainsi la nature vectoriel du champ électromagnétique doit nécessairement être prise en compte. Or, jusqu'à présent, les cavités chaotiques électromagnétiques tridimensionnelles n'ont que très peu été étudiées et les quelques travaux de la communauté du chaos ondulatoire sur le sujet ont, soit négligé, soit rendu les pertes négligeables. Cependant, ces dernières sont un élément incontournable des chambres réverbérantes expérimentales et on ne peut donc faire fi de leur rôle lorsque l'on s'intéresse à une situation concrète d'utilisation. Un autre objectif des travaux de thèse présentés dans ce manuscrit sera donc de montrer comment étendre le formalisme de l'hamiltonien effectif et les prédictions des matrices aléatoires aux systèmes chaotiques ouverts dont le champ est vectoriel.

Le présent manuscrit est composé de cinq chapitres. Le premier chapitre est une introduction en parallèle au domaine des chambres réverbérantes à brassage de modes pour les tests de compatibilité électromagnétique et au domaine du chaos ondulatoire. La mise en balance des problématiques rencontrées par la communauté des chambres réverbérantes et des propriétés universelles des systèmes chaotiques fera apparaître les cavités chaotiques comme des chambres réverbérantes idéales mais soulèvera un certain nombre de questions de physique fondamentale auxquelles nous essaierons de répondre dans les chapitres suivants.

Le second chapitre montre comment construire et caractériser une chambre réverbérante chaotique en s'appuyant sur les propriétés statistiques universelles prédites par



---

la théorie des matrices aléatoires. Nous montrerons pourquoi une chambre réverbérante conventionnelle n'est pas, en général, une cavité chaotique et comment de manière pragmatique et économique lui conférer cette qualité.

Dans le troisième chapitre, nous verrons comment modéliser les pertes dans une cavité chaotique grâce à la théorie des matrices aléatoires et au formalisme de l'hamiltonien effectif. Nous rappellerons les principales prédictions statistiques obtenues grâce à ce formalisme et vérifiées par les ondes scalaires. Dans ce chapitre seront également mis en exergue les paramètres et quantités nécessaires à la description d'une cavité présentant des pertes. Enfin nous montrerons dans quelles limites les prédictions des matrices aléatoires sont valides.

Le quatrième chapitre est dans un premier temps consacré à l'extension du formalisme de l'hamiltonien effectif et des prédictions de la théorie des matrices aléatoires au cas des systèmes ouverts décrits par des champs vectoriels. Puis nous vérifierons expérimentalement et numériquement ces prédictions dans des chambres réverbérantes rendues chaotiques et présentant des pertes. Enfin, nous comparerons les distributions spatiales d'intensité du champ électrique dans une chambre réverbérante chaotique et une chambre réverbérante conventionnelle avec les prédictions des matrices aléatoires. Nous nous intéresserons également aux fluctuations statistiques des valeurs maximales du module du champ électrique, cette quantité étant souvent étudiée par la communauté des chambres réverbérantes pour caractériser l'uniformité statistique du champ dans la chambre.

Le cinquième et dernier chapitre, plus court que les autres, concerne l'étude statistique des décalages des largeurs des résonances des cavités chaotiques lors d'une variation paramétrique. Ce chapitre permet de montrer que les chambres réverbérantes chaotiques sont comme leurs analogues quasi-bidimensionnelles des systèmes modèles du chaos ondulatoire.

---

# Chapitre 1

## Problématique des chambres réverbérantes à brassage de modes, vers une chambre réverbérante chaotique

L objectif de la section 1.1 de ce chapitre est de poser un contexte d'utilisation des chambres réverbérantes à brassage de modes (CRBM) à l'attention du lecteur non familier de ces systèmes, d'introduire le vocabulaire qui leur est associé et de présenter la problématique liée à leur utilisation. Les lecteurs intéressés par un état de l'art plus complet et un historique sur les CRBM pourront se reporter aux chapitres d'introduction des thèses de C.LEMOINE [2] et C.BRUNS [3]. La section 1.2 est une introduction aux propriétés universelles du chaos ondulatoire, vérifiées dans les cavités électromagnétiques (EM) chaotiques, et aux concepts et outils théoriques utilisés pour leur étude dans les cas des systèmes sans pertes. La dernière section présente à la fois les avantages qu'apporterait une CR chaotique aussi bien d'un point de vue théorique que pratique en abondant les questions fondamentales qui doivent être résolues et les contraintes pratiques que nous nous sommes fixées.

## 1.1 Les chambres réverbérantes pour les tests de compatibilité électromagnétique

### La compatibilité électromagnétique

Quel est le point commun entre une moto, un smartphone, une lampe à néon, un avion de ligne ou un char d'assaut ? Tout ces systèmes embarquent des composants électriques ou électroniques dont le fonctionnement est à la fois générateur de "pollution" électromagnétique et perturbé par l'environnement électromagnétique. Avant que ne soient mis en service de tels systèmes, il est donc nécessaire de connaître leur émissivité, c'est-à-dire caractériser les champs EM générés lors de leur fonctionnement et leur susceptibilité (ou immunité), c'est-à-dire caractériser les champs EM pouvant engendrer un dysfonctionnement du système. Ces problèmes, dits de compatibilité électromagnétique (CEM), sont bien connus du grand public (on demande par exemple d'éteindre son téléphone cellulaire dans un avion pour éviter des dysfonctionnements des systèmes vitaux de l'appareil), et font l'objet de normes [4–6] et de directives internationales qui fixent les limites acceptables d'émissivité et de susceptibilité. Ainsi, un industriel doit à la fois pour des raisons légales et pour identifier et corriger les défauts de CEM de son matériel réaliser des tests CEM qui peuvent être mis en œuvre soit dans une chambre anéchoïque [7] – cavité métallique dont les parois internes sont tapissées par un absorbant EM – servant à illuminer l'objet sous test avec un champ EM direct et polarisé, soit dans une chambre réverbérante à brassage de mode (CRBM) [4], dans laquelle l'objet sous test est plongé dans un champ EM statistiquement uniforme et isotrope (voir Figure 1.1), non polarisé et pouvant atteindre des intensités relativement élevées. Cette propriété attendue dans les CR rend particulièrement pertinent leur emploi pour les tests d'immunité électromagnétique. En effet, lors de son utilisation, un même équipement électrique ou électronique est soumis

à des ondes électromagnétiques pouvant venir aussi bien de sources naturelles<sup>1</sup> que de sources artificielles, pouvant être "intentionnelles"<sup>2</sup> ou "non intentionnelles"<sup>3</sup>. Cet équipement doit donc être immunisé vis à vis des ondes EM appartenant à une large gamme de fréquences et d'intensités, d'orientations et de polarisations très diverses (variables) et souvent non prévisibles. Dans une CRBM, le champ EM est supposé statistiquement uniforme et isotrope, son énergie est donc répartie uniformément sur *l'objet sous test* (OST) quelle que soit sa position, ce qui permet en une seule campagne de mesures et sans bouger l'objet sous test de rechercher pour quelles fréquences il présente un dysfonctionnement sans se soucier de l'orientation et de la polarisation de la perturbation.

---

1. Foudre, rayonnements cosmiques, etc

2. Systèmes de communication/télécommunication sans fil (wifi, bluetooth, GSM, 3G, 4G, etc), systèmes GPS, ondes radios ou TV hertziennes, etc

3. Un autre équipement électrique ou électronique pouvant soit être embarqué dans le même système – dans une voiture cohabitent le système de déclenchement des airbags et le régulateur de vitesse – soit juste présent dans son environnement – une alimentation électrique ou une simple lampe à néon près d'un câble Ethernet.

## Description des CRBM

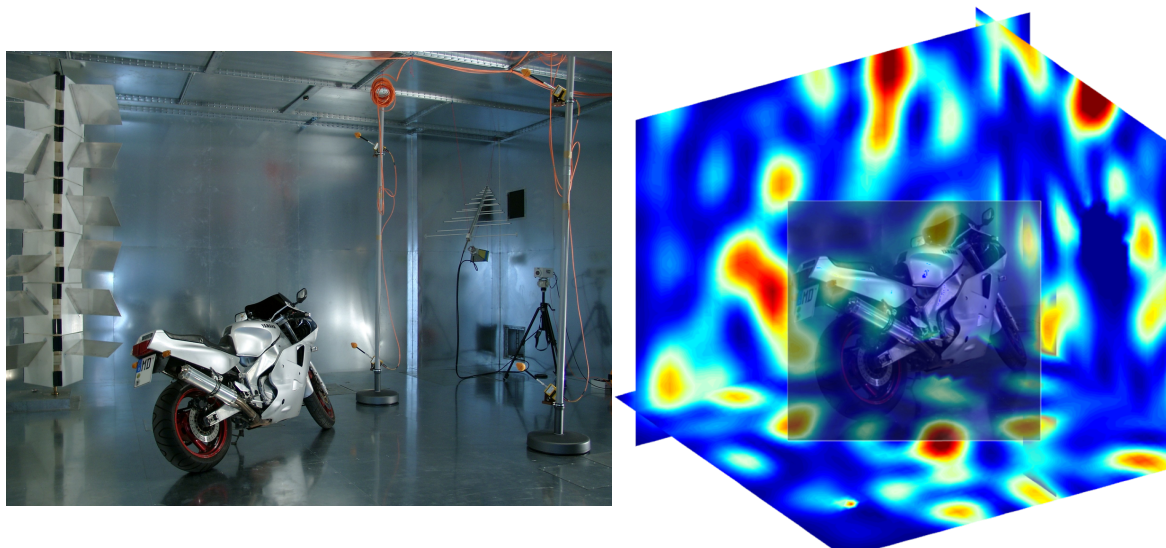


FIGURE 1.1 – **Test de CEM en chambres réverbérantes.** Image de gauche : Une CR utilisée pour des test de CEM (© BY © Magdeburg-reverberation chamber). Image de droite : Un OST "plongé" dans un champ statistiquement uniforme et isotrope.

Une chambre réverbérante électromagnétique à brassage de modes (Figure 1.1) consiste en une cavité métallique, généralement parallélépipédique, équipée d'un ou plusieurs bras-seurs mécaniques, eux aussi métalliques, d'antennes et/ou de sondes pour exciter et mesurer le champ EM à l'intérieur. Du fait de la forme irrégulière du ou des bras-seurs, la géométrie globale de la CR (murs+brasseur(s)) est relativement complexe. Le brasseur est également un élément mobile de la CR ; le plus souvent mis en rotation par un moteur, il permet de modifier les conditions aux bords de la cavité EM. Les procédures de CEM rassemblées dans un document qui fixe la norme [4] ne donnent aucune précision sur la géométrie ni le nombre de bras-seurs utilisés. Cependant, la norme précise que le brasseur doit avoir une dimension non négligeable par rapport à la longueur d'onde associée à la fréquence minimum utilisable (en anglais *the lowest useable frequency* (LUF)) ; les définitions de la LUF sont rappelées un peu plus loin. Enfin, l'emploi de métaux à forte conductivité électrique ( $\sim 10^7$  S/m) tel que le cuivre, l'aluminium ou l'acier galva-

nisé, assure, dans les gammes de fréquences utilisées, un facteur de qualité assez élevé. Ce dernier permet l'obtention, avec un minimum d'amplification en entrée, de niveaux de champ relativement élevés à l'intérieur de la CR, et traduit l'isolation de celle-ci vis à vis de l'environnement électromagnétique extérieur.

## Principe de fonctionnement

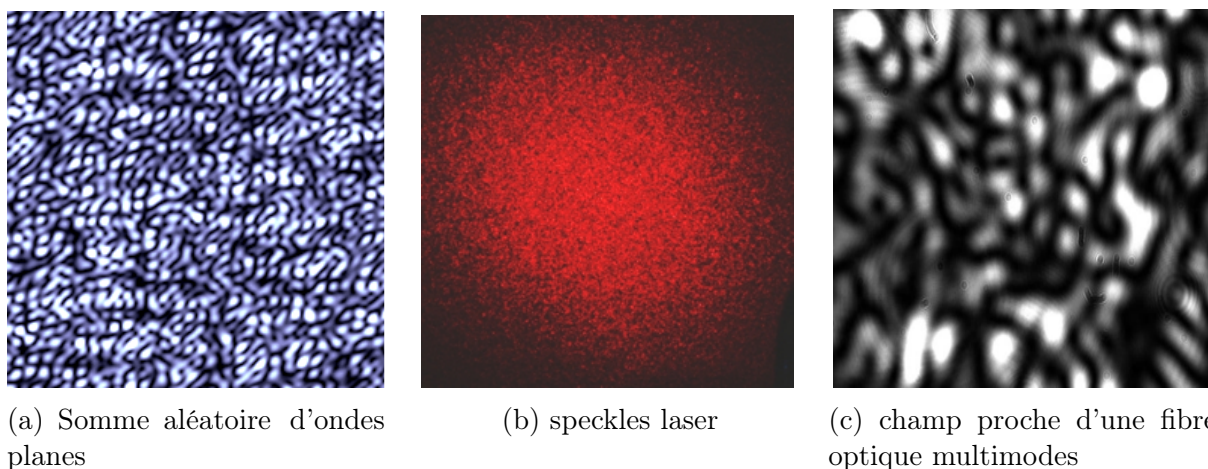


FIGURE 1.2 – **Exemples de champs 2D statistiquement uniformes et isotropes**

Un champ statistiquement uniforme et isotrope est en principe assez facile à obtenir, il suffit de sommer un nombre suffisant d'ondes ayant des caractéristiques spatiales, même régulières, suffisamment différentes. Voici deux exemples :

- On peut sommer un grand nombre d'ondes planes de phases et d'amplitudes très variables (assimilables à des variables aléatoires indépendantes), cela revient alors à faire une somme aléatoire d'ondes planes (Figure 1.2a) [8]. On pourra citer par exemple les tavelures (*speckles*) laser (Figure 1.2b) obtenues lorsqu'un faisceau laser rencontre un milieu désordonné, comme une feuille de papier, et qui correspond à la figure d'interférences de toutes les ondes planes diffusées ou retrodiffusées par chaque élément du milieu [9, 10].
- On peut sommer un nombre suffisant de modes propres d'une cavité. En faisant

cela on obtient un champ statistiquement uniforme et isotrope dont la distribution spatiale n'a plus rien à voir avec la distribution spatiale des modes intervenant dans la somme. Le champ proche d'une fibre optique multimodes (Figure 1.2c) illuminée avec un angle important est obtenu de cette façon : la diffraction à l'entrée de la fibre sélectionne un nombre non négligeable de modes [11–15], dont on récupère la superposition après leur propagation dans la fibre. Cependant, si le nombre de modes impliqués dans la somme n'est pas suffisant, les caractéristiques spatiales de chaque terme vont influencer le champ résultant qui peut alors ne plus être statistiquement uniforme et isotrope [15, 16].

Dans une CR, le champ statistiquement uniforme et isotrope attendu est obtenu par l'action conjointe de deux mécanismes : les pertes et le brassage. Nous allons décrire leur rôle respectif.

### Le rôle des pertes sur la réponse de la cavité

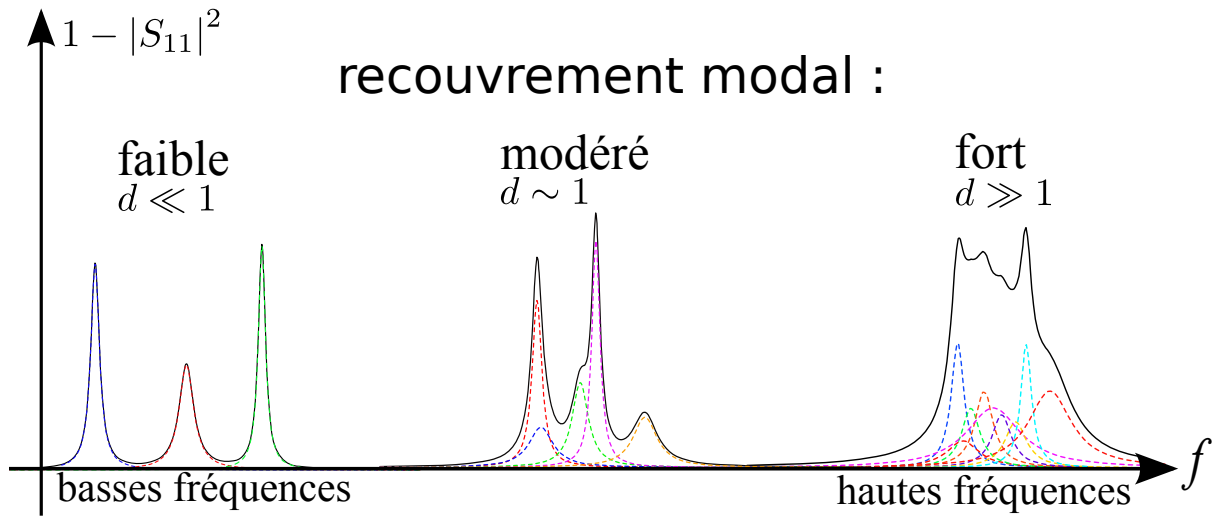


FIGURE 1.3 – Différents régimes de recouvrement modal

Pour une fréquence d'excitation  $f$ , la réponse électromagnétique de la cavité i.e. le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, f)$  mesuré en  $\vec{r}$  et créé par une source arbitraire de courant  $\vec{J}_e(\vec{r}_0)$  occupant un volume  $V_0$ , peut schématiquement s'écrire comme une somme pondérée des



champs propres  $\vec{E}_n$  associée aux résonances individuelles (ou modes propres)  $f_n$  [17, 18] :

$$\vec{E}(\vec{r}, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \vec{E}_n(\vec{r}). \quad (1.1)$$

Dans le cas d'une cavité parfaitement conductrice, les termes  $a_n(f)$  sont nuls sauf pour  $f = f_n$  et sont proportionnels à  $\int_{V_0} d\vec{r}_0 \vec{E}_n(\vec{r}_0) \cdot \vec{J}_e(\vec{r}_0)$ . Cependant, malgré un facteur de qualité élevé, une partie de l'énergie injectée dans une CR est dissipée par celle-ci (voir chapitre 4). Ces pertes entraînent un élargissement des résonances individuelles qui commencent alors à se chevaucher (Figure 1.3). Les  $a_n(f)$  s'écrivent alors [17–19],

$$a_n(f) = \frac{\int_{V_0} d\vec{r}_0 \vec{E}_n(\vec{r}_0) \cdot \vec{J}_e(\vec{r}_0)}{[f^2 - (f_n - i\Gamma_n/2)^2]} \times \frac{f^2}{c^2} \quad (1.2)$$

où  $f_n$  et  $\Gamma_n$  sont respectivement la fréquence centrale et la largeur (bande passante) de la  $n$ -ième résonance individuelle. En combinant les équations (1.1) et (1.2), on se rend compte que, pour chaque fréquence, la réponse est une fonction continue de  $f$  et que la somme doit porter sur l'ensemble des résonances individuelles. Dans les faits, seul un nombre réduit  $N$  de modes, ceux dont la fréquence centrale est suffisamment proche de la fréquences d'excitation, intervient effectivement dans la réponse mesurée, les  $a_n(f)$  devenant négligeables lorsque  $f$  est trop loin de  $f_n$ . Ce nombre  $N$  dépend crucialement du recouvrement modal autour de  $f$ . Ce dernier peut être quantifié grâce à un paramètre sans dimension  $d$ , appelé le *recouvrement modal moyen* et défini par

$$d = \frac{\bar{\Gamma}}{\Delta} \quad (1.3)$$

où  $\bar{\Gamma} = \overline{\Gamma_n}$  est la largeur moyenne k des résonances individuelles et  $\Delta = \overline{f_{n+1} - f_n}$  est l'espacement moyen entre résonances successives (le *mean level spacing*). On peut définir trois régimes de recouvrement modal, illustrés tous trois dans la Figure 1.3 :

- $d \ll 1$  correspond à un recouvrement modal faible. On est alors dans un régime

- de résonances bien isolées ( $N = 1$ ), seule la résonance individuelle la plus proche de  $f$  intervient dans (1.1). On a une réponse très proche de celle d'une cavité fermée,  $\vec{E}(\vec{r}, f) \propto \vec{E}_n(\vec{r})$  si  $f \simeq f_n$ , sinon  $\vec{E}(\vec{r}, f) \simeq 0$ . La réponse a donc les mêmes distributions spatiales que le champ propre  $\vec{E}_n$
- $d \gg 1$  correspond à un fort recouvrement modal. Les résonances individuelles se recouvrent tellement que la somme porte sur un grand nombre de modes ( $N \gg 1$ ). Dans un tel régime, la représentation modale de la réponse (équation (1.1)) n'est plus vraiment pertinente, les caractéristiques spatiales de chaque champ propre n'ayant plus réellement d'importance. Le champ résultant peut tout simplement être assimilé à une superposition aléatoire d'ondes planes. La réponse est alors statistiquement uniforme et isotrope quelle que soit  $f$  et la configuration de la CR.
  - $d \sim 1$  correspond à un recouvrement modal modéré. Quelques modes participent effectivement à la réponse et la distribution spatiale de leurs champs propres détermine celle du champ résultant. Dans ce régime, la réponse n'est pas forcément statistiquement uniforme et isotrope pour toutes les configurations de la CR et toutes les fréquences d'excitation.

### Le rôle du brassage

Le brassage (*stirring* en anglais) permet de faire une moyenne d'ensemble du champ vu par l'objet sous test en changeant la configuration de la CR. Cela est supposé permettre d'obtenir en moyenne une réponse qui est spatialement statistiquement uniforme et isotrope, et revient à supposer que les CR sont des systèmes ergodiques (moyenne spatiale, moyenne en fréquence et moyenne d'ensemble sont équivalentes). Il peut donc exister plusieurs types de brassages :

- le brassage mécanique est le plus souvent utilisé et consiste à changer les conditions aux bords vues par le champ EM en modifiant la géométrie de la CR. Ce type de brassage consiste le plus souvent à changer la position du brasseur en le faisant

tourner soit de manière continue soit par pas successifs suffisamment grands pour qu'à chaque configuration la réponse obtenue soit décorrélée de la précédente [4], i.e. que la distribution spatiale de  $\vec{E}$  soit très différente d'un pas à l'autre. Le brasseur doit donc avoir une dimension non négligeable par rapport à la longueur d'onde de l'excitation. Une alternative au brasseur est de bouger une des parois [20] ou d'avoir des murs en matériaux flexibles sensibles aux vibrations [21]. Ce type de brassage ne fait pas que changer la distribution spatiale de la réponse, il change aussi les résonances individuelles (leurs largeurs, leurs fréquences centrales, et la distribution spatiale des champs propres associés) intervenant dans la réponse.

- *le brassage électronique* ou fréquentiel revient à modifier de manière continue la fréquence d'excitation sur une bande réduite autour d'une fréquence donnée [4, 22–24].
- On peut également réaliser un brassage en jouant sur la position, l'orientation et la polarisation de la source. Ce type de brassage est qualifié de *brassage "de source"* ou *source stirring* [24–26]

Bien entendu, le brassage n'est efficace que si les réponses de la cavité ont pour chaque configuration (position du brasseur, fréquence d'excitation, configuration de la source) des distributions spatiales très différentes les unes des autres. Afin d'obtenir un plus grand nombre de configurations de la CR les différents mécanismes de brassage peuvent être combinés [27].

Notons que l'utilisation du terme chambre réverbérante à **brassage de modes** est un abus de langage car se ne sont pas les modes individuels de la cavité qui sont brassés mais bien les réponses qui sont une somme pondérée des résonances individuelles et dont la pondération dépend des pertes.

### Existence d'une fréquence minimum utilisable (LUF)

L'efficacité des deux mécanismes cités plus haut est très dépendante de la gamme de fréquences utilisée pour l'excitation ou plus précisément de la distance entre la fréquence d'excitation  $f$  et la fréquence de coupure  $f_c$  de la cavité – appelée aussi fréquence fondamentale. Un régime idéal d'utilisation d'une CR correspond à un régime de recouvrement modal fort. En utilisant les relations suivantes  $\Delta = \varrho(f)^{-1}$  et  $\bar{\Gamma} = f/Q$ , où  $\varrho(f)$  et  $Q$  sont respectivement la densité modale et le facteur de qualité moyen de la cavité autour de  $f$ , on trouve  $d = \varrho f Q^{-1}$  (en omettant d'écrire la dépendance en  $f$ ). Le recouvrement modal autour d'une fréquence donnée dépend de deux paramètres : la densité modale et les pertes (traduites par  $Q$ ). En première approche, dans une CR on souhaite que  $Q$  soit relativement grand (généralement  $Q \gtrsim 1000$ ), donc pour obtenir un  $d$  élevé la densité modale doit être suffisamment importante (la CR est alors dite en "surmode" ou *overmoded*). Or, dans une cavité électromagnétique 3D, la densité modale moyenne autour d'une fréquence  $f$ , que l'on notera ici  $\bar{\varrho}(f)$  est une fonction polynomiale du second degré (loi de Weyl), sans terme du premier degré [28] :

$$\bar{\varrho}(f) = \frac{8\pi V}{c^3} f^2 + O(1) \quad (1.4)$$

où  $V$  est le volume de la CR et  $c$  la vitesse de la lumière. Grâce à l'équation (1.4), on peut estimer la valeur de  $d$  autour d'une fréquence donnée en connaissant uniquement le volume et le facteur de qualité moyen de celle-ci. autour de  $f$

$$d \simeq \frac{8\pi V}{c^3 Q} f^3 \quad (1.5)$$

Ainsi, plus on monte en fréquence, plus la densité modale est importante et plus le recouvrement modal est fort (Figure 1.3). De surcroît, plus on monte en fréquence, plus le brassage mécanique est efficace car, la longueur d'onde diminuant, les résonances in-

dividuelles sont de plus en plus impactées par les changements de condition au bord. A l'inverse, à basse fréquence, on a  $d \ll 1$ . On est donc dans un régime de résonances bien isolées : ni les pertes ni le brassage ne peuvent être efficaces. Il doit donc exister une fréquence de transition à partir de laquelle le champ est toujours statistiquement uniforme et isotrope, celle-ci est appelée fréquence minimum utilisable (LUF) et est souvent associée à la fréquence minimale pour laquelle la CR est *overmoded* [3, 29]. La LUF n'a pas de définition bien précise, on trouve dans la littérature au moins trois définitions qui ne sont pas nécessairement équivalentes [3, 4]

1. La LUF égale 3 à 6 fois la fréquence de coupure.
2. La LUF est la fréquence à partir de laquelle on a au moins 60 à 100 modes dans la cavité et au moins 1,5 modes/MHz. La dernière partie de la définition est assez problématique car pour coïncider avec la première partie, il faut fixer un volume minimum pour la CR.
3. La LUF est la plus basse fréquence à partir de laquelle le champ est toujours statistiquement uniforme. Dans la pratique, c'est la fréquence à partir de laquelle le critère d'uniformité défini dans la norme [4] est toujours vérifié.

## Le modèle statistique traditionnel des CR

Le modèle statistique qui fait référence est celui proposé par D.Hill en 1998 [22, 29, 30]. Il part de l'hypothèse que le champ à l'intérieur de la CR peut être décomposé en un grand nombre d'ondes planes qui se réfléchissent sur les parois de la cavité, la rotation du brasseur permettant de rediffuser ces ondes planes dans des directions aléatoires. Cette décomposition en ondes planes (théorie des rayons) n'est pertinente que dans un régime hautes fréquences dans lequel les longueurs d'ondes sont très petites devant les dimensions de la cavité. La CR est donc supposée "overmoded". Comme dans ce régime le recouvrement modal est important, on peut supposer que la décomposition en onde planes est

en fait une somme continue d'ondes planes aléatoires résultant en un champ complexe dont partie réelle et partie imaginaire ont le même poids statistique. Chacune des composantes cartésiennes  $E_c$  du champ électrique  $\vec{E}$  est alors assimilée à une variables aléatoire complexe où partie réelle et partie imaginaire sont deux variables aléatoires gaussiennes centrées, indépendantes et identiquement distribuées, c'est-à-dire ayant la même variance  $\varsigma^2$ . Comme conséquence directe de cette hypothèse, le module carré des composantes cartésiennes  $|E_c|^2$  et le carré de la norme  $||\vec{E}||^2$  de  $\vec{E}$ , ont respectivement pour moyennes  $\langle |E_c|^2 \rangle = 2\varsigma^2$  et  $\langle ||\vec{E}||^2 \rangle = 6\varsigma^2$ , et une fois renormalisés par leur moyenne respective ils suivent

$$\begin{cases} P(\mathcal{I}_2) = \exp(-\mathcal{I}_2) & (1.6) \\ P(\mathcal{I}_6) = \frac{9}{\Gamma(3)} (\mathcal{I}_6)^2 \exp(-3\mathcal{I}_6) & (1.7) \end{cases}$$

où  $\mathcal{I}_2 = |E_c|^2 / \langle |E_c|^2 \rangle$  et  $\mathcal{I}_6 = ||\vec{E}||^2 / \langle ||\vec{E}||^2 \rangle$ . Une remarque : si on renormalise plutôt par  $\varsigma^2$  alors le module carré des composantes suit une loi  $\chi_2^2$  et le carré de la norme du vecteur champ électrique suit un  $\chi_6^2$ .

### Domaine de validité : $f \gg \text{LUF}$

Une question importante est de savoir quel est le domaine fréquentiel de validité de ce modèle. Ce régime de Hill correspond en physique nucléaire au régime d'Ericson [31, 32] et en acoustique des salles au régime de Schroeder [33, 34]. Pour Schroeder ce régime est atteint lorsque le recouvrement modal moyen est au moins égal à 3 ( $d \geq 3$ ). Ce critère permet d'estimer une fréquence de transition, appelée en acoustique fréquence de Schroeder  $f_S$ , à partir de laquelle une représentation modale de la réponse n'est plus pertinente et peut être remplacée par une représentation en ondes planes aléatoires. On va s'intéresser à présent à comparer  $f_S$  dans une CR à 1) la fréquence de coupure de la cavité  $f_c$  et 2) la LUF. Les calculs qui vont suivre n'ont pas vocation à estimer de manière précise  $f_S$ , on se permettra donc de faire un certain nombre d'approximations

qui peuvent paraître parfois un peu grossières. On va commencer par estimer  $f_c$ . Sachant que le nombre moyen de résonances dans la cavité jusqu'à une fréquence  $f$  est donné par la loi de Weyl  $N_{Weyl}$ , définie par [28],

$$\mathcal{N}_{Weyl}(f) = \int_0^f \bar{\varrho}(\nu) d\nu \quad (1.8)$$

On a donc  $\mathcal{N}_{Weyl}(f_c) \simeq 1$ . En n'intégrant que le terme dominant de l'équation (1.4) on trouve :

$$1 \simeq \frac{8\pi V}{3c^3} f_c^3 \quad (1.9)$$

C'est ici que l'on fait l'approximation la plus grossière car au voisinage de  $f_c$ , le terme constant de (1.4) n'est généralement pas négligeable. Notons maintenant  $f = pf_c$ , avec  $p \in \mathbb{R}$ , en combinant les équations (1.5) et (1.9) on trouve :

$$d(pf_c) \simeq \frac{8\pi V}{c^3 Q} f_c^3 p^3 \simeq \frac{3}{Q} p^3 \quad (1.10)$$

Comme pour  $f = f_S$ , le recouvrement modal  $d = 3$ ; en posant  $f_S = p_S f_c$ , on trouve grâce à l'équation (1.10)  $p_S = \sqrt[3]{Q}$ . La fréquence de Schroeder de la CR est donc :

$$\boxed{f_S \simeq \sqrt[3]{Q} f_c}. \quad (1.11)$$

Comme dans les CR, on a typiquement  $Q \sim 1000$ ,

$$f_S \sim 10 f_c \quad (1.12)$$

Si on compare ce résultat aux différentes définitions de la LUF, on trouve que :

$$f_S = 2 \sim 3 \times \text{LUF} \quad (1.13)$$

Le modèle de Hill n'est donc valable qu'à haute fréquence et dans une gamme de fréquences bien plus haute que celle prédite par LUF. Ces calculs simples font apparaître que si l'on veut utiliser pour définir la LUF, la fréquence à partir de laquelle les hypothèses de Hill sont vérifiées, il faut absolument prendre en compte les pertes de la cavité et trouver un compromis entre pertes et densité modale. Une approche quantitative basée sur la convergence d'un critère statistique dépendant du recouvrement modal est proposé par A. Cozza dans [35] afin de définir la LUF en tenant compte du facteur de qualité de la cavité. Une conséquence directe de cette approche est que la LUF varie selon que la CR est vide ou que l'on y introduit des éléments induisant des pertes.

### Comportement d'une CR pour $f \sim \text{LUF}$

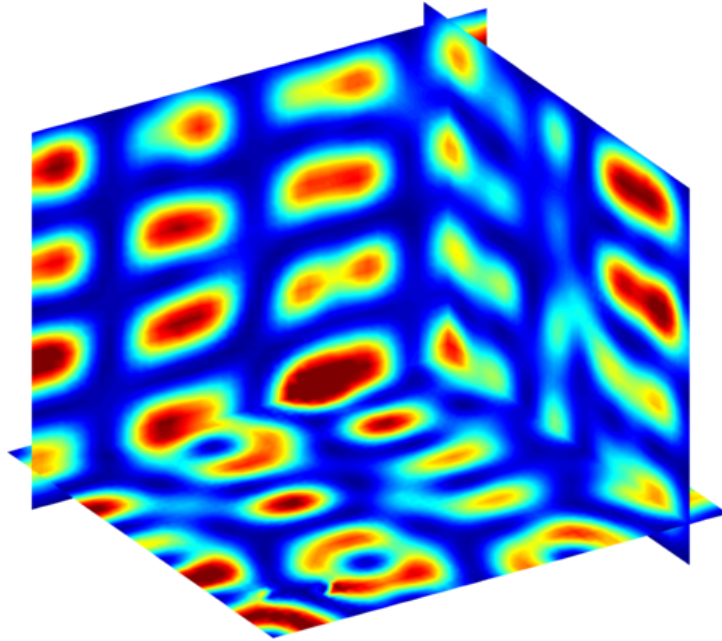


FIGURE 1.4 – **Exemple de réponse proche de la LUF qui n'est ni statistiquement uniforme ni isotrope**

On va se rapprocher maintenant de fréquences proches de la LUF. Il est connu que, dans cette gamme de fréquences, même si  $f > \text{LUF}$ , la réponse peut ne pas être statistiquement uniforme ni isotrope (voir Figure 1.4) et ce malgré le brassage [36, 37]. On



parle alors de composantes non brassées. À partir de l'expression (1.10) et des définitions conventionnelles de la LUF, on peut estimer l'ordre de grandeur du recouvrement modal. Si on suppose toujours que  $Q \sim 1000$ , on a pour les deux cas extrêmes  $LUF = 3f_c$  et  $LUF = 6f_c$  respectivement  $d \simeq 0,1$  et  $d \simeq 0,7$ . Donc, pour des fréquences d'excitations proches de la LUF, la CR est dans un régime de recouvrement modal modéré ( $d \sim 1$ ). Seules quelques résonances individuelles interviennent effectivement dans la réponse (Figure 1.3) et la distribution spatiale de cette dernière est fortement dépendante de la distribution spatiale des champs propres associés à ces résonances. De plus, même si le champ est statistiquement uniforme et isotrope (Figure 1.1), dans ce régime les *hypotheses de Hill* ne sont pas valides : on ne peut donc pas supposer a priori que parties réelle et imaginaire de la réponse ont le même poids statistique de sorte que les composantes cartésiennes de  $\vec{E}$  ne suivent pas a priori un  $\chi_2^2$  (voir chapitre 4). Dans ce régime, les CR conventionnelles ont un comportement hautement non universel qui dépend du nombre de brasseurs, de leur géométrie ou encore de leurs positions [3, 38], mais aussi des antennes utilisées [39], ou des objets introduits [35, 40], ces derniers comme les antennes faisant varier le facteur de qualité de la CR et donc comme montré précédemment rapprochant plus ou moins la CR du régime de Hill.

Une activité intense de recherche s'est donc développée dans la communauté des CRBM dans le but : 1) d'améliorer le comportement des CR dans ce régime  $f \sim LUF$  afin de diminuer à terme la fréquence minimum utilisable et 2) de trouver un modèle statistique adéquat dans ce régime [36, 41–43] afin notamment de proposer des quantités plus adaptées que celles de la norme pour caractériser les CR [2]. Remarquons tout de même que ces études reviennent souvent à ajuster les résultats expérimentaux ou numériques par des distributions de probabilités paramétriques dont les lois limites correspondent au régime de Hill. En ce qui concerne le premier point, on peut distinguer deux axes principaux de recherche. Le premier se concentre sur l'optimisation du brassage principalement au travers de la recherche d'une géométrie optimale ou d'un nombre idéal de

brasseurs. [3, 38, 44–47]. Comme le fait remarquer Bruns [3], toutes ces études sont basées sur une approche essais/erreurs, et il démontre numériquement qu’aucun brasseur quelle que soit sa taille, sa forme ou sa position n’est efficace en dessous de la LUF. Le second axe consiste à modifier la géométrie globale de la CR en s’inspirant soit des chambres réverbérantes acoustiques [34, 48, 49] par exemple en utilisant des murs ondulés [50] ou non parallèles [51], soit des cavités chaotiques [52] en introduisant des éléments diffractants du point de vue des rayons, comme un octant de sphère par exemple [53]. Dans chacun de ces cas, il est mis en évidence une amélioration du comportement de la CR mais ces approches ne sont en aucun cas utilisées pour développer des hypothèses quantitatives sur les statistiques du champ EM près de la LUF.

## 1.2 Cavité électromagnétique chaotique : comportement universel prédit par les matrices aléatoires

### Deux mots sur le chaos ondulatoire

Le chaos ondulatoire est depuis près de 40 ans un domaine de recherche qui touche à des systèmes de natures très variées : physique quantique [54], acoustique des salles [34] ou des océans [55], optique guidée [15], cavités microondes [56, 57] etc. Originellement appelé chaos quantique, il s’intéressait alors aux comportements statistiques spectraux et spatiaux des systèmes quantiques dont la limite classique présente une dynamique chaotique [58–60]. Grâce aux analogies formelles entre l’équation de Schrödinger stationnaire et l’équation de Helmholtz scalaire [16, 61] d’une part et entre la mécanique d’une masse ponctuelle (équations de Hamilton) et la limite géométrique des rayons (optique géométrique et équation eikonale) d’autre part [15, 62], le chaos quantique s’est généralisé à l’ensemble des systèmes ondulatoires dont la limite géométrique des rayons présente une dynamique chaotique et prit alors le nom de chaos ondulatoire. Pour des raisons histo-

riques, les concepts et la théorie du chaos ondulatoire se sont donc développés dans le contexte de la mécanique quantique en lui empruntant son formalisme et son vocabulaire, et en supposant que les ondes sont décrites par des champs scalaires. Les billards— systèmes clos, dans lesquels une masse ponctuelle se meut librement et se réfléchit sur les parois selon les lois de Snell-Descartes— constituent du fait de leur "simplicité", un des systèmes "modèles" du chaos classique [63–70]. Dans ces systèmes, le chaos est induit par la complexité de leur géométrie. Ainsi, à part quelques billards de forme simple comme le rectangle, le cercle ou le demi-cercle par exemple, qui sont dit intégrables et présentent une dynamique régulière (il y a autant de constantes du mouvement que de degrés de liberté), la majorité des billards ont une dynamique chaotique mais à différents niveaux d’ergodicité [62], ils peuvent être mixtes (par exemple un cercle tronqué à plus de la moitié du diamètre) [71], pseudointégrables (comme pour le billard avec barrière) [72], ou complètement chaotiques (billards de Sinaï ou stades de Bunimovich). Les cavités, au rang desquelles on trouve les cavités microondes, sont l’analogie ondulatoire des billards et sont donc naturellement devenues les systèmes physiques "modèles" du chaos ondulatoire [61, 73]. Depuis la conjecture de Bohigas-Giannoni-Schmit [59] (1984) concernant l’universalité des fluctuations des niveaux (fréquences propres) dans les spectres des systèmes quantiques (ondulatoires) complètement chaotiques, il est devenu commun d’utiliser les concepts, outils, et quantités statistiques introduits par la théorie des matrices aléatoires (TMA) (*random matrix theory* (RMT) en anglais) appliquée aux ensembles gaussiens, pour analyser et prédire les comportements statistiques spectraux, mais aussi spatiaux, suivis par n’importe quel système chaotique. Une micro précision historique, la TMA fut originellement introduite en physique nucléaire par E. Wigner pour caractériser, entre autre, la répulsion de niveaux observée dans les spectres des noyaux lourds [74, 75]. Dans les paragraphes qui vont suivre nous rappellerons d’abord les principaux concepts et résultats qui font des matrices aléatoires un outil clef dans l’analyse des systèmes chaotiques et principalement des cavités chaotiques. Les résultats présentés ici ne porteront que sur les quantités spectrales

et spatiales des systèmes dit fermés, invariants par renversement du temps (c'est-à-dire vérifiés dans des cavités théoriquement sans pertes ou expérimentalement avec des pertes négligeables). Les rappels concernant les statistiques spatiales et spectrales des systèmes ouverts (i.e. cavités dans lesquelles les pertes et leurs effets ne sont plus négligeables) feront l'objet du chapitre 3 de cette thèse. Le lecteur intéressé par une introduction plus complète à la théorie des matrices aléatoires dans le domaine du chaos ondulatoire pourra se référer aux ouvrages suivants : chapitre 3 du livre de H.-J. Stoeckmann [61] et chapitre 4 du livre de S. Haake [76], aux deux cours des Houches d' O.Bohigas [60, 77], ainsi qu'au papier de revue de T.Guhr *et. al.* [78]. Toutes les prédictions TMA, qui vont être présentées dans ce chapitre, ont été vérifiées expérimentalement dans des cavités micro-ondes (voir par exemple le papier de revue de A.Richter [79] ou le chapitre 2 du livre H.-J. Stoeckmann [61]). Nous clôturerons cette section en rappelant que, dans des cavités micro-ondes, des écarts aux prédictions universelles de la TMA peuvent être observés. Ces écarts doivent être associés à des caractéristiques propres à la géométrie de chaque billard et peuvent être analysés grâce à une approche semi-classique (théorie des rayons) associée à la théorie des orbites périodiques (voir par exemple [80–82]).

## TMA : principaux concepts

L' état stationnaire ou quasi stationnaire d'un système ondulatoire soumis à une excitation de fréquence  $f$  est entièrement décrit par sa fonction de Green  $G$ . Cette dernière est solution de l'équation

$$(\Delta_{\vec{r}} + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}', k) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.14)$$

ou  $k = 2\pi f c^{-1}$ . Ici on suppose que le champ dans la cavité peut être décrit par une onde scalaire. La réponse de la cavité, notée  $\Psi(\vec{r}, f)$ , à une excitation créée par une source

quelconque,  $s(\vec{r}, f)$ , oscillant à une fréquence  $f$ , s'écrit en fonction de  $G$  comme [83]

$$\Psi(\vec{r}, f) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}', 2\pi f/c) s(\vec{r}', f) d\vec{r}' \quad (1.15)$$

Si on utilise le formalisme opératoire de la mécanique quantique, l'équation (1.14) peut se mettre sous la forme [83]

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - \mathcal{H}} \quad (1.16)$$

où  $\mathcal{H}$  est l'hamiltonien du système. Lorsque le système est intégrable, le spectre et les modes de  $\mathcal{H}$  peuvent être obtenus analytiquement. Par contre, pour un système non-intégrable, ceux ci ne peuvent être obtenus que par des méthodes numériques de résolution d'équations différentielles dont la possible mise en œuvre dépend non seulement de la complexité du système mais aussi des ressources numériques à disposition. L'idée de la TMA est de remplacer l'opérateur hamiltonien du système chaotique par un ensemble de matrices aléatoires gaussiennes  $H$  de grande taille (théoriquement leur rang tend vers l'infini) dont les éléments  $H_{ij}$  sont distribués selon des lois normales centrées. L'ensemble approprié auquel appartient  $H$  est déterminé par les symétries globales (ou invariants) du système physique dont on souhaite modéliser les propriétés statistiques. Les systèmes ouverts étant traités au chapitre 3 on ne s'intéresse ici qu'au problème fermé. L'hamiltonien  $\mathcal{H}$  est donc un opérateur hermitien et il peut être remplacé, en fonction de ses invariants, par des matrices aléatoires hermitiennes  $H$  appartenant à l'un des trois ensembles suivants :

- l'ensemble GOE pour *Gaussian Orthogonal Ensemble*, composé de matrices réelles symétriques et diagonalisables par une transformation orthogonale. L'ensemble GOE décrit les systèmes invariants par renversement du sens du temps comme par exemple les cavités complètement chaotiques [59].
- l'ensemble GUE pour *Gaussian Unitary Ensemble*, composé de matrices complexes

hermitiennes (valeurs propres réelles mais vecteurs propres complexes) et diagonalisables par une transformation unitaire. L'ensemble GUE décrit les systèmes dont l'invariance par renversement du sens du temps est brisée. Les prédictions GUE peuvent être vérifiées expérimentalement dans des cavités micro-ondes en introduisant sur l'une des parois une bande de ferrite sur laquelle est appliquée un champ magnétique suffisamment intense [84].

- l'ensemble GSE pour *Gaussian Symplectic Ensemble*, composé de matrices réelles quaternions, diagonalisables par une transformation symplectique. L'ensemble GSE décrit les systèmes invariants par renversement du sens du temps avec interactions de spin 1/2. Les prédictions GSE peuvent être vérifiées expérimentalement dans des cavités microondes chaotiques mais de manière "artificielle" en ne sélectionnant qu'une résonance sur deux d'un spectre GOE [85].

Comme notre objectif est de rendre chaotique les chambres réverbérantes, ce sont les prédictions liées à GOE qui conviennent pour servir de référence. Nous allons donc détailler à présent les propriétés des matrices appartenant à cet ensemble.

## Propriétés et comportements statistiques des matrices aléatoires GOE :

### Définition d'une matrice GOE

Supposons que  $H$  est une matrice de dimension  $N \times N$  appartenant à l'ensemble GOE, la distribution des éléments de  $H$  peut être mis sous la forme générale :

$$P_N(H) = K_N \exp \left( -\frac{\text{Tr}(H^2)}{4\varsigma^2} \right) \quad (1.17)$$

où  $K_N$  est une constante de normalisation et

$$\text{Tr}(H^2) = \sum_{1 \leq i \leq N} H_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} H_{ij}^2. \quad (1.18)$$

Autrement dit, les éléments  $H_{ij}$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes les unes des autres, de moyenne nulle

$$\langle H_{ij} \rangle = 0 \quad (1.19)$$

et de même variance  $\varsigma^2$  à l'exception des éléments diagonaux dont la variance est deux fois plus grande que celle des éléments antidiagonaux,

$$\langle H_{ij}^2 \rangle = \varsigma^2(1 + \delta_i^j) \quad (1.20)$$

La notation  $\langle \dots \rangle$  est utilisée pour désigner une moyenne d'ensemble. À partir de la distribution (1.17), on peut obtenir la distribution jointe des valeurs propres  $\{\varepsilon_n\}$  associées aux matrices  $H$

$$P_N(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = c_N \exp \left[ -\frac{1}{4\varsigma^2} \sum_i \varepsilon_i^2 \right] \prod_{j>i} |\varepsilon_j - \varepsilon_i| \quad (1.21)$$

Bien que les éléments de matrice  $H_{ij}$  soient indépendants, les spectres qui leur sont associés sont corrélés et ce sont justement ces corrélations qui sont universellement vérifiées par les systèmes chaotiques à condition que  $N \gg 1$  et que les valeurs propres aient été proprement normalisées de sorte que leur espacement moyen  $\Delta$  soit constant ; c'est dans cette limite que sont obtenues les prédictions analytiques en TMA.

## Densité moyenne des valeurs propres et redressement du spectre

La première quantité importante à définir est la densité des valeurs propres autour d'une "énergie"  $\varepsilon$ ,

$$\varrho(\varepsilon) = \sum_{n=1}^N \delta(\varepsilon - \varepsilon_n) \quad (1.22)$$

Le comportement moyen de  $\varrho$ , noté  $\langle \varrho \rangle$ , est dépendant de  $\varepsilon$  et suit la loi semi-circulaire de Wigner,

$$\langle \varrho(\varepsilon) \rangle = \begin{cases} (2\pi\varsigma^2)^{-1} \sqrt{4N\varsigma^2 - \varepsilon^2} & \text{si } |\varepsilon| < 2\sqrt{N\varsigma^2} \\ 0 & \text{si } |\varepsilon| > 2\sqrt{N\varsigma^2} \end{cases} \quad (1.23)$$

On peut remarquer que la condition  $N \gg 1$ , utilisée pour les prédictions analytique entraîne automatiquement que  $\langle \varrho \rangle \sim \text{constante}$ . La densité moyenne de niveaux des matrices GOE est donc très différente de la densité moyenne polynomiale attendue dans une cavité et prédite par la loi de Weyl ([28, 59, 61]). Il est donc nécessaire de supprimer sa contribution au spectre, afin que les quantités statistiques basées sur les fluctuations du spectre soient comparables entre système physique, simulation TMA et prédictions analytiques. On appelle cette procédure : le redressement du spectre ou *unfolding* en anglais. On commence par intégrer la densité de niveaux (équation (1.22)) afin d'obtenir la fonction de comptage des modes  $\mathcal{N}$ , définie par

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \varrho(\varepsilon') d\varepsilon' = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(\varepsilon - \varepsilon_n) \quad (1.24)$$

Celle-ci oscille autour d'un comportement moyen  $\overline{\mathcal{N}}$ , dépendant de  $\varepsilon$  et lié à la densité moyenne de niveaux  $\overline{\varrho}$  par :

$$\overline{\mathcal{N}}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \overline{\varrho}(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (1.25)$$

Une propriété importante des matrices GOE est leur ergodicité : ainsi une moyenne d'ensemble et moyenne en "énergie" sont équivalentes [76], ce qui implique que  $\overline{\varrho}(\varepsilon) = \langle \varrho(\varepsilon) \rangle$ .



En posant,

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \int^{\epsilon} (2\pi\zeta^2)^{-1} \sqrt{4N\zeta^2 - \epsilon^2} d\epsilon \\ &= \frac{\epsilon\sqrt{4\zeta^2 N - \epsilon^2}}{4\pi\zeta^2} + \frac{N \tan^{-1}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{4\zeta^2 N - \epsilon^2}}\right)}{\pi} \end{aligned} \quad (1.26)$$

et comme la limite de  $g$  aux bords de la loi semi-circulaire (1.23) donne

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \pm 2\sqrt{N\zeta^2}} g(\epsilon) = \pm N/2$$

la fonction de comptage moyenne s'écrit donc

$$\overline{\mathcal{N}}(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\epsilon| \geq 2\sqrt{N\zeta^2} \\ g(\epsilon) + \frac{N}{2} & \text{si } |\epsilon| < 2\sqrt{N\zeta^2} \end{cases} \quad (1.27)$$

Connaissant la fonction de comptage moyenne, on peut définir le spectre redressé associé à la séquence de valeurs propres  $\{\epsilon_n\}_{n \in [1;N]}$  par

$$\boxed{x_n = \overline{\mathcal{N}}(\epsilon_n)}. \quad (1.28)$$

Par construction, sur l'ensemble du spectre redressé  $\{x_n\}_{n \in [1;N]}$ , l'espacement moyen entre les  $x_n$  vaut 1 quelle que soit la taille totale de la séquence  $N$ , ce qui implique trivialement :

$$\langle \varrho(x) \rangle = 1 \quad (1.29)$$

$$\overline{\mathcal{N}}(x) = x \quad (1.30)$$

Ce sont les fluctuations des  $x_n$  qui ont un caractère universel. Le redressement du spectre est équivalent à normaliser les valeurs propres par l'espacement moyen local  $\Delta(\epsilon) = \varrho^{-1}(\epsilon)$ . Il est commun dans la communauté TMA, lorsque l'on veut vérifier des prédictions analytiques par des simulations de matrices aléatoires, de ne prendre que les valeurs

propres au centre de la loi semi-circulaire, typiquement  $-0.1 \leq \varepsilon_n \leq 0.1$  car autour de  $\varepsilon = 0$  la densité modale est maximale et pratiquement constante. Ainsi, on peut renormaliser toutes les valeurs propres par la même constante  $\Delta = \langle \varrho(0) \rangle^{-1}$ , on obtient alors un jeu de valeurs propres ayant les mêmes propriétés que les  $x_n$ , tout en gardant un échantillon statistique conséquent. Cependant, par rapport au redressement, l'échantillon statistique à disposition n'en demeure pas moins réduit.

Les graphiques présentés dans la Figure 1.5 illustrent le processus de redressement, l'ergodicité, et l'alternative au redressement (restriction au centre de loi semi-circulaire). Pour les simulations, la variance des éléments des matrices est fixée à  $\varsigma^2 = 2(N\pi^2)^{-1}$ , le rayon de la loi semi-circulaire est alors indépendant de la taille des matrices et est fixé à  $\sqrt{8}/\pi$  et  $\langle \varrho(0) \rangle = N/\sqrt{2}$ . Tout d'abord, l'effet du redressement du spectre est caractérisé par la transition entre la Figure 1.5a et Figure 1.5c et la transition entre la Figure 1.5b et Figure 1.5d, où en supprimant la dépendance en  $\varepsilon$  de la densité d'états on fait apparaître uniquement les fluctuations universelles du spectre. On remarquera que ces fluctuations ont des amplitudes relativement faibles si bien que la fonction de comptage  $\mathcal{N}$  et son comportement moyen  $\overline{\mathcal{N}}$  sont indiscernable à l'échelle des figures principales. Ensuite, l'ergodicité des matrices GOE est illustrée par l'accord entre les fonctions de comptage (en bleu)  $\mathcal{N}(\varepsilon)$  (Figure 1.5b) et  $\mathcal{N}(x)$  (Figure 1.5d), obtenues à partir de la diagonalisation d'une seule matrice GOE, et les lois théoriques, équations (1.27) et équations (1.30), (en rouge sur les figures). En effet, ces dernières sont obtenues en intégrant  $\langle \varrho(\varepsilon) \rangle$  et  $\langle \varrho(x) \rangle$ , qui sans l'ergodicité ( $\langle \varrho \rangle = \bar{\varrho}$ ) sont des quantités moyennes qui, a priori, ne sont vérifiées que par un ensemble de matrices GOE (Figure 1.5a et Figure 1.5c). Enfin, l'insert de la Figure 1.5b montre un zoom de la figure principale entre -0.1 et 0.1 sur lequel est superposé en orange la fonction de comptage moyenne que l'on obtiendrait si la densité d'états était constante et égale à  $\langle \varrho(0) \rangle$ ,

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \langle \varrho(0) \rangle \varepsilon + \frac{N}{2}. \quad (1.31)$$

Cette fonction rend parfaitement compte localement du comportement moyen de  $\mathcal{N}$ . Celui-ci est similaire à celui du spectre redressé (Figure 1.5d). Ceci illustre l'équivalence entre le redressement par  $\overline{\mathcal{N}}$  et, sur une bande spectrale pas trop importante, la renormaliser du spectre par l'espacement moyen local entre résonances.

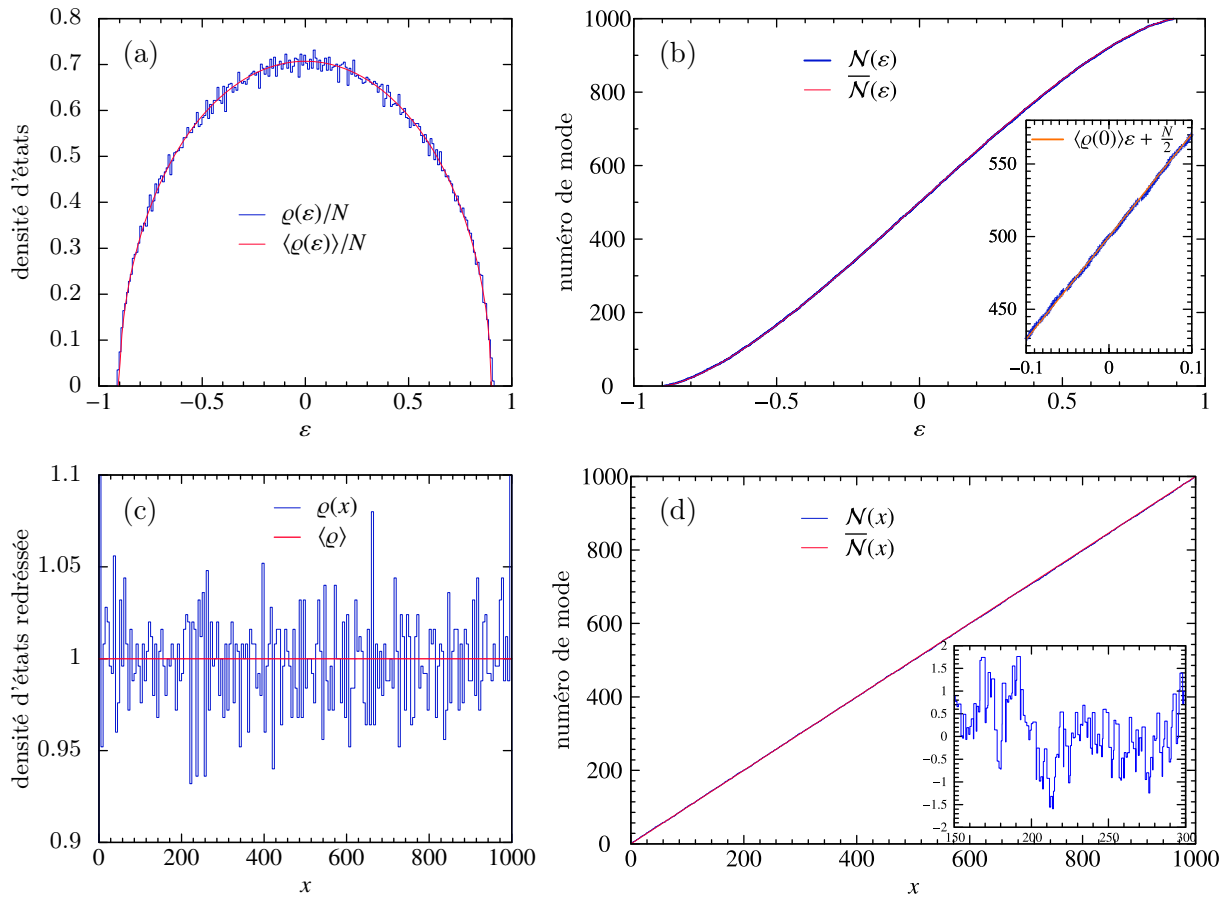


FIGURE 1.5 – **Illustration de l'unfolding et de l'ergodicité.** Les graphiques **a** et **c** comparent respectivement la densité des  $\varepsilon_n$  obtenues en diagonalisant 50 matrices  $1000 \times 1000$  et la densité des  $x_n$  associés (histogrammes en bleu) avec leurs quantités moyennes attendues (courbes en traits pleins rouges) prédites par les equations (1.23) et (1.29). Les graphiques **b** et **d** comparent respectivement la fonction de comptage des valeurs propres obtenues en diagonalisant une seule matrice GOE  $1000 \times 1000$  et celle du spectre redressé associé (courbe en escalier bleu) avec les fonctions de comptage moyennes déduites en intégrant les  $\langle \varrho \rangle$  associés aux equations (1.27) et (1.30) (courbes en trait plein rouge). L'insert dans le graphique **b** est un zoom du graphique principal sur lequel on superpose la droite d'équation  $\langle \varrho(0) \rangle \varepsilon + N/2$  (trait plein orange). L'insert dans le graphique **d** présente les fluctuations de  $\mathcal{N}(x) - \overline{\mathcal{N}}(x)$  pour  $x \in [150, 300]$ .

### Distribution des écarts entre plus proches voisins : le $P(s)$

La distribution des écarts entre plus proches voisins (*Nearest neighbor spacing distribution* (NNSD) en anglais) est certainement la quantité statistique la plus fameuse du chaos ondulatoire. Elle est utilisée lorsque l'on veut vérifier si un système peut être considéré comme chaotique et donc être modélisé par TMA [56, 59]<sup>4</sup>. La NNSD rend compte des corrélations à courte portée du spectre redressé des systèmes chaotiques en s'intéressant à la distribution  $P(s)$  des écarts  $s$  entre valeurs propres successives définis sur le spectre redressé par

$$s_i = x_{i+1} - x_i \quad (1.32)$$

ou localement autour d'une "énergie"  $\varepsilon$  par

$$s_i = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{\Delta(\varepsilon)}. \quad (1.33)$$

On a donc  $\langle s_i \rangle = 1$  ou  $\overline{s_i} = 1$  (à cause de l'ergodicité). Le  $P(s)$  peut être analytiquement obtenu pour  $N \rightarrow \infty$ , mais son calcul est très compliqué et sa forme analytique, que l'on nommera ici  $P_{\text{GOE}}$  est peu pratique à manipuler. On lui préfère souvent une expression approchée, obtenue analytiquement par E. Wigner à partir des matrices GOE  $2 \times 2$ . Comme il le fait remarquer, la validité de son approche repose sur le caractère local de la NNSD. Ce résultat est connu sous le nom de *Wigner surmise*, on le notera  $P_{\text{Wigner}}$ . La dérivation du *Wigner surmise* peut être obtenue facilement en partant de la distribution (1.21) des valeurs propres des matrices GOE avec  $N = 2$  (voir l'annexe A, pour le détail du calcul) et aboutie à une forme analytique assez simple :

$$P_{\text{Wigner}}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \quad (1.34)$$

---

4. La référence [56] est le premier article qui démontre la validité des prédictions TMA dans une cavité micro-ondes chaotique

Le *Wigner surmise* rend parfaitement compte du phénomène de répulsion de niveau linéaire observé dans les systèmes chaotiques au travers du comportement asymptotique du  $P(s) \sim \pi s/2$  pour  $s \rightarrow 0$ . Un tel phénomène est marqueur d'un spectre fortement corrélié sans dégénérescence possible. Il indique aussi que lors d'une évolution paramétrique (comme un brassage mécanique) à aucun moment deux résonances successives ne vont pouvoir se croiser ; au contraire elles s'éviteront : c'est ce que l'on appelle un croisement évité. Bien que le *Wigner surmise* néglige les corrélations à plus longue portée du spectre, il décrit de manière très précise la distribution de  $s$  pour des matrices de rang supérieur ( $N \gg 1$ ), comme illustré par la Figure 1.6 où le  $P(s)$  obtenu en diagonalisant 50 matrices GOE de taille  $N=1000$  (histogramme bleu) est comparé au  $P_{\text{Wigner}}$  (courbe rouge). L'accord entre la distribution exacte pour des matrices de rang 2 et l'histogramme obtenu pour des matrices de rang 1000 est excellent, et l'écart relatif entre  $P_{\text{GOE}}$  et  $P_{\text{Wigner}}$  n'est que de quelques % (voir insert de la Figure 1.6). Si on se concentre, par exemple sur le comportement au voisinage de l'origine de  $P_{\text{Wigner}}$  et  $P_{\text{GOE}}$ , c'est-à-dire sur la partie de la distribution qui détermine la répulsion de niveau, on trouve que ([77])

$$P_{\text{Wigner}}(s) \sim \frac{\pi}{2}s \quad (1.35)$$

$$P_{\text{GOE}}(s) \sim \frac{\pi^2}{6}s \quad (1.36)$$

$$(1.37)$$

ce qui correspond à un écart relatif de 4.7% sur la pente.

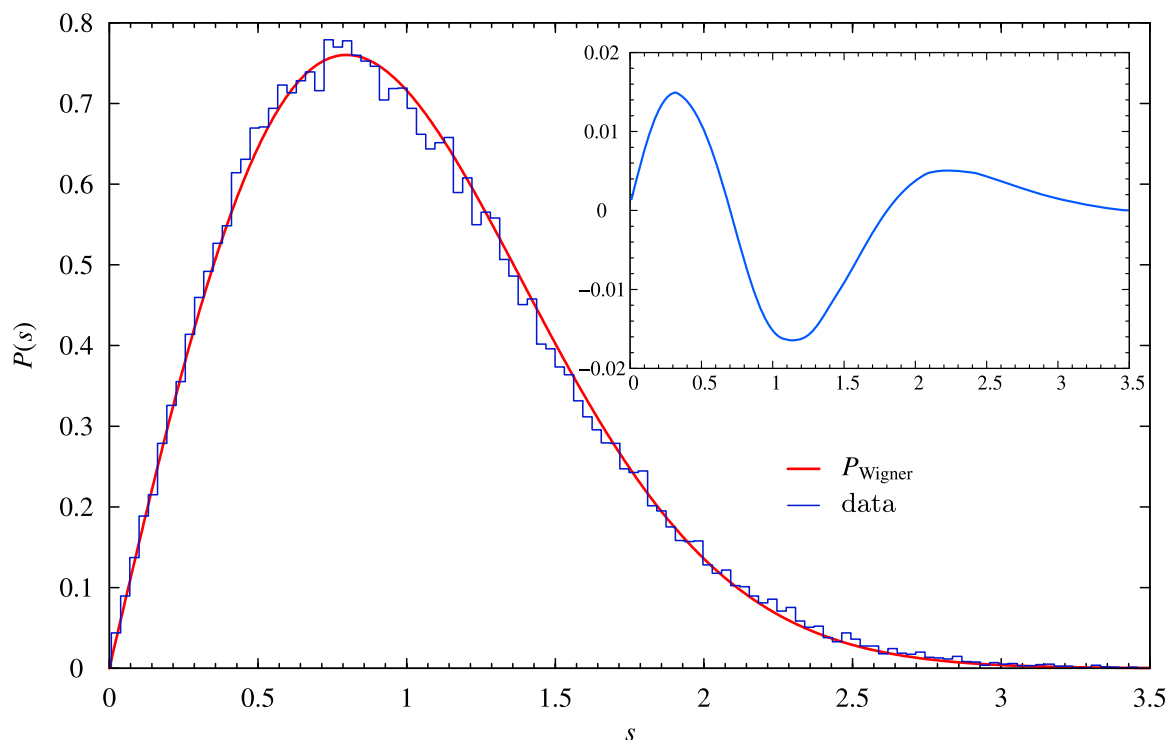


FIGURE 1.6 – **Distribution des écarts entre plus proches voisins** obtenue sur le spectre redressé de 50 matrices GOE de rang  $N=1000$  (histogramme bleu). La courbe rouge correspond au Wigner surmise  $P_{\text{Wigner}}$ . En insert est tracé  $P_{\text{GOE}} - P_{\text{Wigner}}$ .

Notons tout de même que la répulsion de niveaux n'est pas propre aux seuls systèmes chaotiques. Par exemple, les systèmes Pseudo-intégrables [86, 87], dont le  $P(s) \propto s \exp(-2s)$  suit une loi de semi-Poisson, présentent eux aussi une répulsion de niveaux linéaire mais, du fait de la queue exponentielle du  $P(s)$ , leur spectre est moins corrélé que celui des systèmes chaotiques (queue gaussienne). Ensuite, la répulsion de niveaux n'est pas une condition nécessaire pour que les fluctuations spectrales soient corrélées. Par exemple, un spectre composé à parts égales de deux spectres GOE indépendants (un demi stade de Bunimowitch par exemple) ne présente pas de répulsion de niveaux mais reste corrélé [77]. Enfin, un spectre présentant des corrélations correspond à une situation générique. Ces corrélations sont plus ou moins fortes, et il n'est pas toujours possible de les modéliser par des matrices aléatoires. Les seuls systèmes pouvant présenter un spectre totalement décorrélé, sont certains systèmes intégrables (une cavité en forme de demi-

cercle par exemple). Berry et Tabor ont montré que si un système intégrable présente un spectre totalement décorrélé alors l'écart entre résonances successives est "équivalent au temps d'attente entre événements successifs d'un processus de Poisson" [88], ce qui implique :

$$P(s) = P_{\text{Poisson}}(s) = \exp(-s) \quad (1.38)$$

Dans de tels systèmes, il y a une forte probabilité d'observer des dégénérescences ou des résonances très proches les unes des autres mais également d'avoir des résonances successives très éloignées.

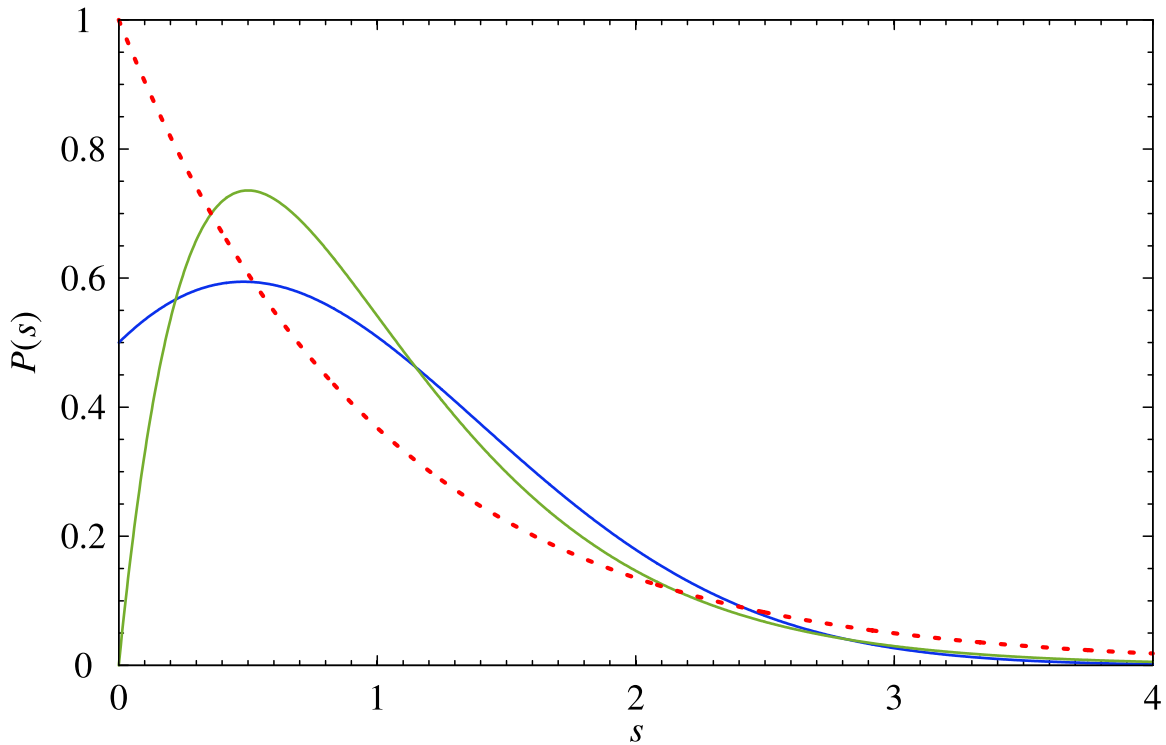


FIGURE 1.7 – **Exemple de  $P(S)$  autre que GOE.** En trait plein  $P(s)$  de spectres présentant des corrélations. En bleu spectre composé de deux spectres GOE indépendant, en vert loi de semi-Poisson. Courbe en tirets rouges : loi de poisson représentatif d'un spectre complètement décorrélé.

## Corrélations à longue portée et rigidité du spectre

La deuxième quantité à laquelle nous allons nous intéresser est associée à la notion de rigidité spectrale. Plus un spectre redressé est rigide moins le nombre de modes présents dans un intervalle de longueur donnée,  $L$ , fluctue. Par exemple, le spectre d'un oscillateur harmonique quantique est parfaitement rigide puisque les résonances sont équidistantes les unes des autres. Pour quantifier la rigidité spectrale d'un système, on utilise souvent une quantité appelée en anglais *the number variance*. Elle est définie comme "la variance, statistique du nombre de niveaux présents dans un intervalle de longueur  $L$ ", et notée  $\Sigma^2(L)$ . Mathématiquement, si on note  $n_\gamma(L)$ , le nombre de modes  $x_i \in [\gamma, \gamma + L]$ , sachant que  $\langle n_\gamma(L) \rangle_\gamma = L$ , on a donc [60, 61, 77] :

$$\Sigma^2(L) \equiv \langle (n_\gamma(L) - L)^2 \rangle_\gamma \quad (1.39)$$

où  $\langle \dots \rangle_\gamma$  correspond à une moyenne sur  $\gamma$  et/ou une moyenne d'ensemble. Lorsque la fonction de corrélation à deux points du spectre  $R_2(x_a, x_b) = \langle \varrho(x_a)\varrho(x_b) \rangle - \delta(x_a - x_b)$ , qui donne la probabilité de trouver en  $x_2$  une résonance du système sachant que l'on a une résonance en  $x_1$  (en fait  $R_2$  n'est fonction que de la distance  $x = |x_a - x_b|$ ), est connue, on peut prédire la dépendance en  $L$  de  $\Sigma^2$  grâce à la relation [60, 61, 77, 78] :

$$\Sigma^2(L) = L - 2 \int_0^L (L - r) Y_2(r) dr \quad (1.40)$$

où  $Y_2(x)$  est la *two-level cluster function* définie par

$$Y_2(x) = 1 - R_2(x) \quad (1.41)$$



et dont la transformée de Fourier

$$b_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_2(x) e^{-i2\pi tx} dx \quad (1.42)$$

est appelée *le facteur de forme à deux niveaux* (*two-level form factor* en anglais). Ce dernier est directement lié au facteur de forme du spectre  $K(t) = 1 - b_2(t)$ , dont la transformée de Fourier donne la fonction d'autocorrélation  $C(x)$  du spectre redressé [61, 76, 85]. Pour les matrices GOE, toutes ces fonctions sont connues (voir Annexe B) et permettent d'obtenir une forme analytique pour  $\Sigma^2$  que l'on notera  $\Sigma_{\text{GOE}}^2$ . Sa forme complète est assez complexe (voir équation (B.6)) et est comparée avec des simulations de matrices aléatoires GOE sur la Figure 1.8.

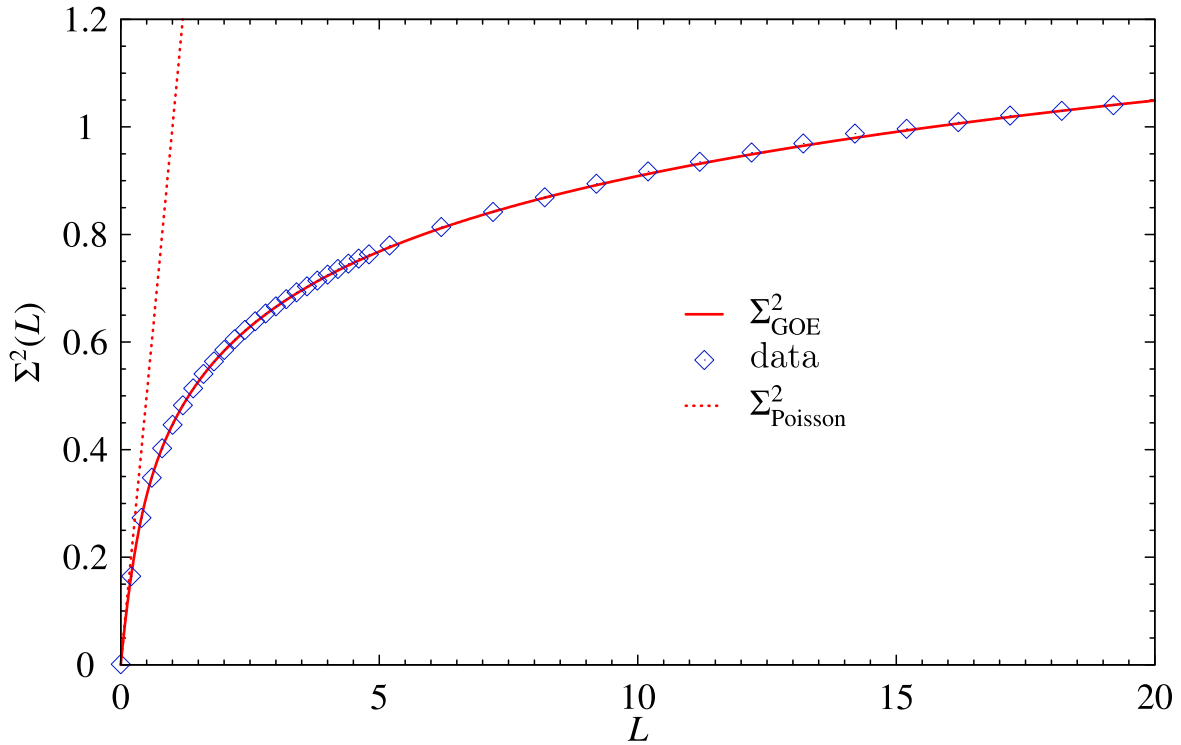


FIGURE 1.8 – **Rigidité spectrale.** Diamants bleus : Variance du nombre de niveaux,  $\Sigma^2(L)$  obtenue sur le spectre redressé de 50 matrices GOE de rang  $N=1000$ . Courbe rouge continue : Variance du nombre de niveaux,  $\Sigma_{\text{GOE}}^2(L)$ , attendue pour les matrices GOE (équation (B.6)). En pointillés rouges : la rigidité spectrale  $\Sigma_{\text{Poisson}}^2(L)$  associée à un spectre complètement décorrélé.

L'accord est parfait entre  $\Sigma^2(L)$  obtenue avec les matrices aléatoires et la formule (B.6). On remarquera que le spectre des matrices GOE est assez rigide car  $\Sigma_{\text{GOE}}^2(L)$  croît lentement. En effet sa forme asymptotique pour  $L \gg 1$  montre une croissance logarithmique [60, 61, 77, 78] , qui vaut approximativement :

$$\Sigma_{\text{GOE}}^2(L) \simeq 2 \ln(L)/\pi^2 + 0.44. \quad (1.43)$$

Ceci est à comparer au comportement linéaire du  $\Sigma^2$  pour un spectre complètement décorré ( i.e. pour  $P(s) = P_{\text{Poisson}}$ ) en pointillés sur la Figure 1.8, on le notera  $\Sigma_{\text{Poisson}}^2(L)$ . Pour tout  $L$  ;

$$\Sigma_{\text{Poisson}}^2(L) = L. \quad (1.44)$$

$\Sigma_{\text{GOE}}^2$  est une quantité qui rend compte de l'existence de corrélations à longue portée dans les spectres des matrices GOE et donc dans les spectres des systèmes chaotiques.

## Distribution des vecteurs propres des matrices GOE

Nous allons à présent montrer que les statistiques des composantes des vecteurs propres des matrices GOE sont équivalentes aux statistiques spatiales des modes d'une cavité chaotique. On notera  $\Psi_{n,i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) la  $i$ -ème composante du  $n$ -ème vecteur propre d'une matrice aléatoire GOE  $H$ . L'invariance par renversement du temps attendue dans les systèmes modélisés par des matrices GOE se traduit par une invariance par transformation orthogonale de  $H$ . Les vecteurs propres de cette dernière peuvent donc être considérés comme réels et leur seul invariant est leur norme. La distribution jointe des  $\{\Psi_{n,i}\}$  s'écrit donc [76]

$$P(\{\Psi_{n,i}\}) \propto \delta \left( 1 - \sum_{i=1}^N \Psi_{n,i}^2 \right) \quad (1.45)$$

On en déduit la probabilité pour la  $i$ -ème composante de prendre pour valeur  $x$  [1, 76] :

$$P(\Psi_{n,i} = x) \propto \int \delta \left( 1 - x^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \Psi_{n,j}^2 \right) \prod_{j=1}^{N-1} d\Psi_{n,j} \quad (1.46)$$

Le résultat de l'intégrale donne (voir le chapitre 4 de [76] pour le détail du calcul)

$$P(\Psi_{n,i} = x) \propto (1 - x^2)^{N/2-3/2} \quad (1.47)$$

En prenant la limite  $N$  tend vers l'infini, limite dans laquelle matrice aléatoire GOE et cavité chaotique sont statistiquement équivalentes et en normalisant l'expression grâce à  $\int P(x)dx = 1$ , on montre que les  $\Psi_{n,i}$  sont distribués selon la loi normale suivante

$$P(x) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{N}{2} x^2 \right). \quad (1.48)$$

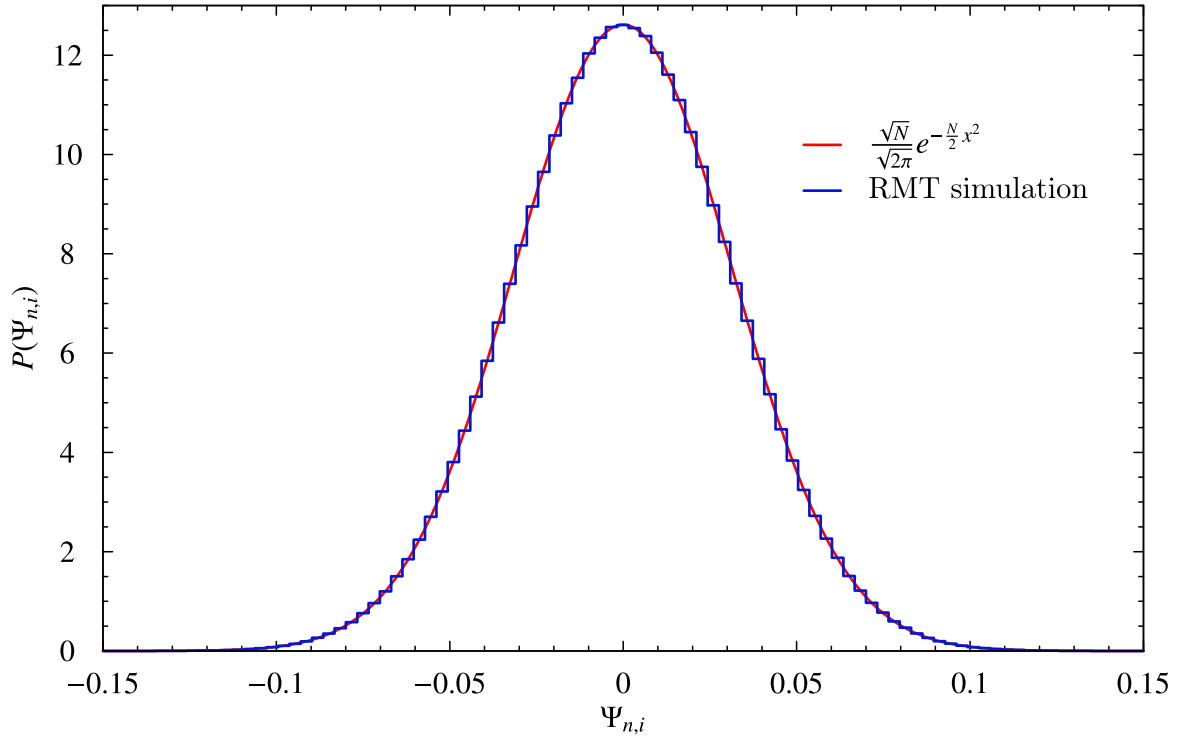


FIGURE 1.9 – **Distribution des composantes des vecteurs propres.** Histogramme bleu : Distribution des composantes de  $1000 \times 10$  vecteurs propres obtenue en diagonalisant 10 matrices GOE de rang  $N=1000$  et en réunissant toutes les composantes de ces vecteurs propres dans une seule variable. Courbe rouge : distribution théorique des composantes d'un vecteur propre d'une matrice GOE

Ce résultat est illustré dans la Figure 1.9. On observe un accord parfait entre la distribution des composantes des vecteurs propres d'un ensemble de 10 matrices GOE de rang  $N=1000$  (histogramme bleu) et la distribution (1.48) (courbe rouge).

Selon les hypothèses de Berry [58], dans la limite semi-classique (i.e pour des fréquences suffisamment hautes), les *modes génériques*<sup>5</sup> d'une cavité chaotique sont localement équivalents à une superposition aléatoire d'ondes planes stationnaires [89]. La conséquence directe de cette hypothèse est que l'amplitude des modes, notée  $\Psi_n(\vec{r})$ , est une quantité statistiquement stationnaire, isotrope et ergodique (pour plus de détails voir les références [73, 89]), distribuée selon une loi normale centrée<sup>6</sup>. Du fait de leur ergodicité, les

5. Les modes statistiquement majoritaires.

6. La intensité normalisé  $\tilde{I}(\vec{r}) = |\Psi_n(\vec{r})|^2 / \langle |\Psi_n(\vec{r})|^2 \rangle_{\vec{r}}$  suit une loi de Porter-Thomas.

modes génériques des cavités chaotiques sont couramment appelés : *modes ergodiques*. Les hypothèses de Berry ont d'abord été vérifiées numériquement par S. McDonald et A. Kaufman [16] puis expérimentalement<sup>7</sup> par exemple dans une cavité micro-ondes supraconductrice [90], ou encore dans des fibres optiques à section transverse chaotique [15].

Ainsi, la distribution des éléments des vecteurs propres des matrices GOE  $\Psi_{n,i}$  et la distribution spatiale des modes propres des cavités chaotiques  $\Psi(\vec{r})$  sont équivalentes. Ceci est extrêmement important car cela permet d'utiliser les matrices aléatoires à la fois pour prédire le comportement spectral mais aussi le comportement spatial des systèmes chaotiques. On a en résumé

Matrices GOE	$\Longleftrightarrow$	Cavité Chaotique
$\varepsilon_n$	$\Longleftrightarrow$	$f_n$ (ou $k_n : 2\pi f_n/c$ )
$\Psi_{n,i}$	$\Longleftrightarrow$	$\Psi(x)$

## Les limites de la TMA

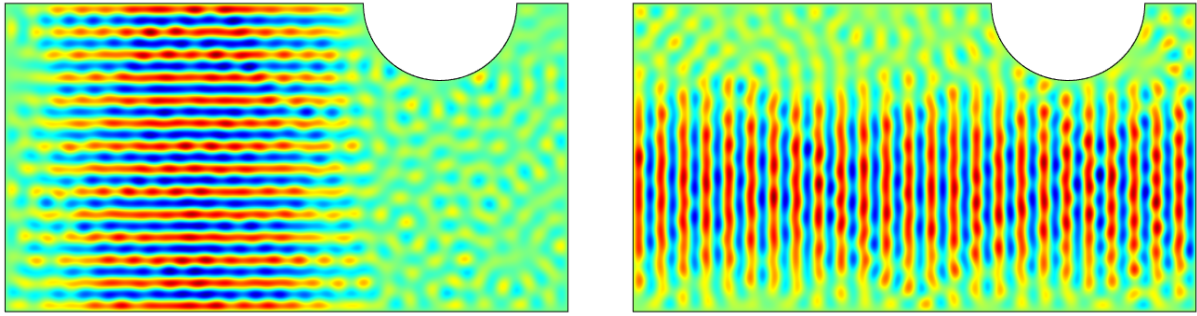


FIGURE 1.10 – Exemple de modes non-génériques de type *bouncing ball* dans un billard de Sinai 2D

Les prédictions statistiques de la TMA sont certes vérifiées universellement par toute cavité chaotique mais uniquement de manière asymptotique, c'est-à-dire quand la fréquence est suffisamment haute [73]. Les cavités chaotiques peuvent présenter un certain nombre de modes, dit *non-ergodiques*, ne vérifiant pas les hypothèses de Berry. Comme

7. Le lecteur intéressé par une revue très complète des résultats obtenus dans différents systèmes expérimentaux pourra se référer au chapitre 2 du livre de H.-J Stöckmann [61].

ces modes sont statistiquement rares quand la cavité est dans le régime asymptotique d'universalité, ils sont aussi couramment appelés *modes non-génériques*. La Figure 1.10 montre deux modes non-génériques d'une cavité de Sinai 2D. On remarquera que tous deux présentent une forte concentration du champ dans les directions perpendiculaires aux murs parallèles. L'étude de ces modes particuliers (liée à l'approche semi-classique basée sur les *orbites périodiques* [81, 91]) constitue un domaine de recherche en soi, qui ne sera pas abordé ici. Le chapitre 2 montrera comment ce type de modes conduit à des déviations aux prédictions de la TMA.

### 1.3 Vers une CRBM chaotique

La comparaison entre les propriétés spatiales des modes génériques d'une cavité chaotique et les propriétés du champ électrique attendues dans une CRBM au dessus de la LUF, nous amène à nous poser la question suivante : en rendant chaotique une CR, ne pourrait-on pas profiter des modes ergodiques des cavités chaotiques, naturellement statistiquement uniformes et isotropes, pour améliorer le comportement des CRBM pour des fréquences proches de la LUF ? Pour répondre à cette question, il est donc nécessaire de rendre chaotiques des CR et d'étudier le comportement statistique spatial des champs vectoriels des cavités EM 3D chaotiques soumises à des pertes. Plutôt que de proposer une géométrie chaotique originale, nous montrerons dans le chapitre 2, comment rendre des CR commerciales chaotiques grâce à un minimum de modifications géométriquement simples à mettre en œuvre et conservant un volume de travail suffisant pour placer un OST dans la CR. Dans le chapitre 3, nous présenterons le formalisme dit de l'hamiltonien effectif, qui permet d'étendre l'emploi des matrices aléatoires aux systèmes chaotiques à pertes. De nombreux travaux ont montré son efficacité à prédire les comportements statistiques universels des cavités micro-ondes chaotiques (voir par exemple le papier de revue de U. Kuhl et al. [92]). En ce qui concerne les cavités EM 3D chaotiques, les travaux de H. Alt et

---

al. [93] et C. Dembowski et al. [94] ont démontré expérimentalement que, dans la limite où les pertes sont négligeables, et bien que le champ soit décrit par une quantité vectorielle, le spectre de ces systèmes vérifie les prédictions spectrales de la TMA. U. Dörr et al. ont montré, quant à eux, que les statistiques prédites par les vecteurs propres des matrices aléatoires GOE sont vérifiées dans les cavités EM 3D, de manière identique par chacune des composantes cartésiennes du champ électrique ou magnétique [52]. Cependant, il n'a jamais été montré si la TMA appliquée à l'hamiltonien effectif pouvait prédire les propriétés statistiques des cavités EM 3D chaotiques dans le cas où les pertes ne peuvent être négligées. Nous apporterons une réponse à la fois numérique et expérimentale à cette question dans les chapitres 4 et 5.

---



## Chapitre 2

# Construire et caractériser une chambre réverbérante chaotique

L’objectif de ce chapitre est de montrer comment construire, ou modifier, de façon simple une CR pour rendre sa géométrie complètement chaotique. À cet effet, nous commencerons notre approche des CR chaotiques par l’étude numérique de cavités EM idéales, sans pertes. Les murs de ces dernières seront donc sans défaut et constitués d’un métal parfaitement conducteur (conductivité infinie). Cependant, cette démarche est loin de rendre compte de la situation expérimentale rencontrée dans les CR. Néanmoins, en ignorant les pertes, nous pouvons nous concentrer uniquement sur les propriétés statistiques induites par la géométrie de la cavité, et utiliser les prédictions statistiques de la TMA appliquée à l’ensemble GOE comme comportements statistiques de référence<sup>1</sup>.

Nous commencerons par présenter notre méthode d’investigation de la chaoticité d’une CR. Cette méthode utilise les quantités spectrales introduites par la TMA comme des outils de diagnostic quantitatif. Ensuite, grâce à des modifications simples et successives d’une cavité parallélépipédique (structure de base de toute CR commerciale), nous dé-

---

1. Il a été effectivement démontré expérimentalement que si les pertes sont négligeables, le spectre d’une cavité EM 3D chaotique vérifie les prédictions statistiques universelles déduites de la TMA appliquée à l’ensemble GOE [93–95]

duirons une "règle générale" pour la construction d'une CR chaotique dès les plus basses fréquences, à savoir la réduction du nombre de surfaces parallèles en vis-à-vis [96]. Enfin, toujours en utilisant ces outils de diagnostic fournis par la TMA, nous vérifierons numériquement que la présence d'un brasseur mécanique dans une CR conventionnelle, même s'il complexifie la géométrie de la CR, n'est pas suffisante pour la rendre complètement chaotique dès les plus basses fréquences et ne permet donc pas de profiter de modes génériques ergodiques. Nous montrerons comment rendre cette CR chaotique, avec un minimum de modifications et en conservant un volume de travail suffisant. Pour chacune des CR présentées dans ce chapitre, nous montrerons que l'accord, ou le désaccord, avec les prédictions spectrales de la TMA sont intimement corrélés aux distributions spatiales des composantes cartésiennes des modes des CR.

## 2.1 Les quantités statistiques de la TMA comme sonde de la chaotité d'une CR

Pour étudier la chaotité des CR présentées dans la suite du chapitre, nous allons suivre la méthode suivante. Pour chaque cavité, on commence par obtenir ses  $N$  premiers modes propres  $\{\vec{E}_i\}_{i \in [1, N]}$ , et les fréquences propres  $\{f_i\}_{i \in [1, N]}$  associées, grâce à un logiciel commercial (Comsol®) de résolution d'équations différentielles par la méthode des éléments finis. Ensuite, pour comparer le spectre  $\{f_i\}$  ainsi obtenu aux prédictions universelles de la TMA, on le redresse grâce à la fonction de comptage moyenne de la cavité considérée, ici encore notée  $\mathcal{N}_{\text{Weyl}}$ . Le spectre redressé  $\{x_i\}$  associé aux fréquences propres  $\{f_i\}$  est obtenu en appliquant la formule (1.28) :  $x_i = \mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f_i)$ . A partir du spectre redressé, on peut alors calculer le *number variance*  $\Sigma^2(L)$  comme défini par l'équation (1.39) et déduire des  $s_i = x_{i+1} - x_i$ , la distribution "empirique"  $P(s)$  des espacements normalisés entre plus proche voisin (NNSD). Ces deux quantités sont comparées aux prédictions des matrices aléatoires GOE,  $P_{\text{Wigner}}(s)$  (équation (1.34)) et  $\Sigma_{\text{GOE}}^2(L)$  (équation (B.6)). Pour

quantifier l'écart aux prédictions GOE, il est usuel d'ajuster la NNSD par une distribution paramétrique appelée distribution de Weibull :

$$P_{\text{Weibull}}(s) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} s^{\beta-1} \exp\left(-\frac{s^\beta}{\alpha^\beta}\right) \quad (2.1)$$

où  $\alpha = \overline{s_i} \Gamma^{-1}(1 + 1/\beta)$ . Cette distribution, aussi connue sous le nom de distribution de Brody lorsque  $\overline{s_i} = 1$  [61], permet une interpolation continue entre la distribution de Poisson (1.38),  $P_{\text{Poisson}} = P_{\text{Weibull}}$  si  $\beta = 1$ , caractéristique d'une cavité parfaitement régulière, et le *Wigner surmise* (1.34),  $P_{\text{Wigner}} = P_{\text{Weibull}}$  si  $\beta = 2$ , typique d'une cavité complètement chaotique. Cependant, le *Wigner surmise* reste une approximation de la vraie distribution  $P_{\text{GOE}}(s)$  suivie par un système chaotique. Il est alors peut-être plus intéressant de comparer le paramètre  $\beta$ , obtenu par l'ajustement de  $P(s)$ , au paramètre de Weibull

$$\beta_{\text{GOE}} = 1.9526 \quad (2.2)$$

correspondant à l'ajustement de la vraie distribution  $P_{\text{GOE}}(s)$  par  $P_{\text{Weibull}}$ . Enfin, on analyse les écarts des distributions empiriques par rapport aux prédictions GOE. Trois causes potentielles peuvent expliquer des déviations par rapport au comportement universel. La première est tout simplement liée à un échantillon statistique insuffisamment. Les deux autres causes sont liées à la physique de la cavité elle-même, car un écart aux prédictions GOE dans une cavité chaotique est toujours attribué au fait que la cavité n'a pas encore atteint le régime asymptotique d'universalité (fréquences trop basses) et/ou à la présence d'un nombre non négligeable de modes non-génériques (ces derniers devenant de plus en plus rares à haute fréquence) dont le principal impact sur le spectre est de donner naissance à des fluctuations à grande échelle de la fonction de comptage  $\mathcal{N}$  par rapport à son comportement moyen donné par  $\mathcal{N}_{\text{Weyl}}$  [94, 96]. On peut résumer cela par :

$$\mathcal{N}_{\text{fluct}}(f) = \mathcal{N}(f) - \mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f) = \mathcal{N}^{\text{GOE}}(f) + \mathcal{N}^{\text{non-gén}}(f) \quad (2.3)$$

où  $\mathcal{N}^{\text{GOE}}$  dénote les fluctuations universelles dues aux modes ergodiques et  $N^{\text{non-gén}}$  les fluctuations non- universelles dues aux modes non génériques. Généralement, les fluctuations décrites par  $N^{\text{non-gén}}$  ont une amplitude beaucoup plus importante que les fluctuations présentes dans un spectre purement GOE et décrites seulement par  $\mathcal{N}^{\text{GOE}}(f)$  [77].

## 2.2 D'une CR régulière à une CR complètement chaotique

Nous rappelons ici que nous voulons rendre chaotique des CR existantes. Cette contrainte pratique nous impose de travailler avec des CR dont la structure de base est celle d'une cavité parallélépipédique parfaitement régulière avant d'y introduire n'importe quel type de brasseur. Dans cette section, nous allons montrer comment rendre chaotique de telles CR, grâce à un nombre minimum de modifications "géométriquement simples". Celles-ci ne seront pas choisies aléatoirement mais découleront de l'identification de la famille de modes non ergodiques ayant le plus de poids dans les fluctuations de la fonction de comptage par rapport à son comportement moyen. Ces modes non ergodiques sont potentiellement présents dans toute CR qui n'est pas complètement chaotique car leur existence est entièrement corrélée à la géométrie parallélépipédique.

### 2.2.1 Une modification trop simple.

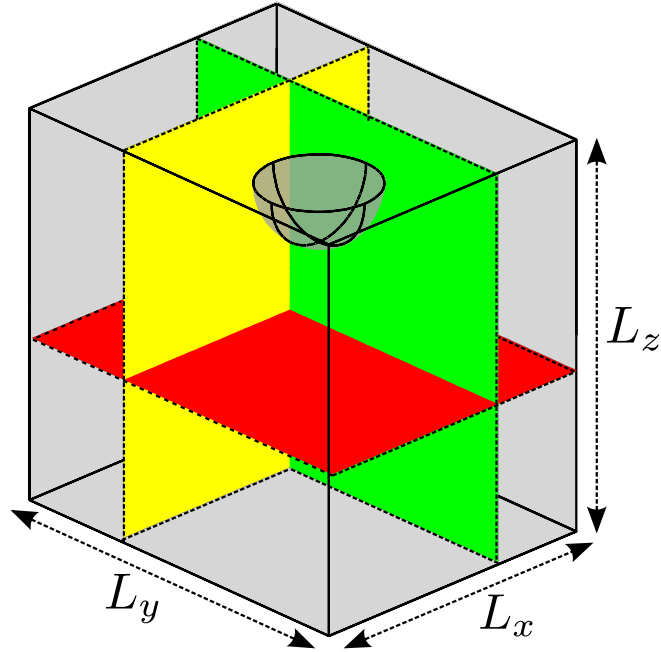


FIGURE 2.1 – **Modification simple d'une CR régulière parallélépipédique** ( $L_x = 0.785$  cm,  $L_y = 0.985$  cm et  $L_z = 0.995$  cm), par l'introduction d'une demi-sphère (de rayon  $r = 15$  cm) sur le plafond. Les plans en couleur sont ceux associés aux modes tangentiels

On commencera par appliquer la procédure que nous venons de décrire à une CR rendue chaotique en plaçant, hors de tout axe de symétrie, une demi-sphère au plafond d'une cavité parallélépipédique. La CR ainsi obtenue est présentée en Figure 2.1 ; ses dimensions sont données dans la légende. Une telle cavité est une réalisation tridimensionnelle d'un billard de Sinai [52,93] appartenant à la famille des billards dispersifs (du point de vue des rayons). Nous allons à présent tester si cette CR est complètement chaotique dès les "plus basses" fréquences. Pour cela, on commence par redresser le spectre des 681 premières fréquences propres de cette CR, grâce à la fonction de comptage moyenne. Cette dernière est reliée à la géométrie de la CR au travers de la loi de Weyl, qui s'écrit pour une cavité

EM 3D [28, 97] :

$$\mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f) = af^3 + bf + \text{const} \quad (2.4)$$

où

$$a = \frac{8\pi}{3c_0^3}V \quad (2.5)$$

$$b = b_{\text{curv}} + b_{\text{edges}} \quad (2.6)$$

$$\text{avec } b_{\text{curv}} = -\frac{4}{3\pi c_0} \int \frac{d\sigma}{R_m(\sigma)} \quad (2.7)$$

$$b_{\text{edges}} = \sum_e \frac{1}{6\pi c_0} \int dl_e \frac{(\pi - \Omega(l_e))(\pi - 5\Omega(l_e))}{\Omega(l_e)}. \quad (2.8)$$

Dans les formules ci-dessus,  $V$  désigne le volume de la cavité,  $c_0$  la vitesse de la lumière,  $R_m$  est le rayon de courbure moyen le long de la surface  $\sigma$  et  $\Omega$  est l'angle diédral le long de l'arête  $e$ . Le terme constant, quant à lui, dépend théoriquement des coins de la cavité<sup>2</sup>. On remarquera qu'estimer le coefficient  $b$  a priori à partir des caractéristiques géométriques de la CR peut se révéler très compliqué. Pour la CR montrée dans la Figure 2.1, on trouve  $b = -1.13 \times 10^{-8} \text{ Hz}^{-1}$ .<sup>3</sup> Le coefficient constant est lui obtenu par un ajustement de la fonction de comptage  $\mathcal{N}(f)$  par la loi de Weyl  $\mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f)$  où  $a$  et  $b$  sont fixés à leurs valeurs théoriques. Une fois tous les coefficients de  $\mathcal{N}_{\text{Weyl}}$  connus, on peut enfin calculer à partir du spectre redressé  $\{x_i\}$ , la distribution des  $s_i = x_{i+1} - x_i$  et le *number variance*  $\Sigma^2(L)$ , et les comparer aux prédictions de la TMA. Cependant, plutôt que de comparer la distribution des  $\{s_i\}_{i \in [1, N]}$  avec le *Wigner surmise* (1.34), la distribution de Poisson (1.38), et  $P_{\text{Weibull}}$  (2.1), on comparera plutôt la fonction de densité cumulée empirique ou fonction de répartition empirique  $F_e(s)$  des  $\{s_i\}_{i \in [1, N]}$  (en anglais *empirical cumulative*

---

2. Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a pas dans (2.4) de terme proportionnel à  $f^2$  et faisant intervenir la surface totale de la cavité. Ce terme est présent si l'on considère indépendamment les polarisations TE ou TM, mais il change de signe selon la polarisation considérée et disparaît donc dans la fonction de comptage totale des modes

3. Nous ne calculerons  $b$  que pour cette CR. Pour toutes les autres situations, on fixera le coefficient  $a$  à sa valeur théorique, donnée par l'équation (2.5), puis on obtiendra  $b$  et  $\text{const}$  en les laissant comme seuls paramètres libres de l'ajustement de la fonction de comptage  $\mathcal{N}(f)$  par la loi de Weyl  $\mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f)$  (équation (2.4))

*distribution function*, ECDF), définie par

$$F_e(s) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta(s - s_i), \quad (2.9)$$

avec les fonctions de densité cumulée (en anglais *cumulative distribution function*, CDF), notées  $F_{\text{Wigner}}$ ,  $F_{\text{Poisson}}$  et  $F_{\text{Weibull}}$ , et définies par

$$F(s) = \int_0^s P(x) dx. \quad (2.10)$$

avec  $P = P_{\text{Wigner}}$  ou  $P = P_{\text{Poisson}}$  ou  $P = P_{\text{Weibull}}$ . On en déduit donc que

$$F_{\text{Wigner}}(s) = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) \quad (2.11)$$

$$F_{\text{Poisson}}(s) = 1 - \exp(-s) \quad (2.12)$$

$$F_{\text{Weibull}}(s) = 1 - \exp\left(-\frac{s^\beta}{\alpha^\beta}\right) \quad (2.13)$$

Les Figures 2.2a et 2.2b comparent respectivement la densité cumulée empirique (2.9) et le *number variance*  $\Sigma^2(L)$ , associés au spectre redressé des 681 premières fréquences propres de la CR montrée dans la Figure 2.1, aux prédictions des matrices aléatoires  $F_{\text{Wigner}}$ ,  $F_{\text{Poisson}}$  et  $\Sigma_{\text{GOE}}^2$ ,  $\Sigma_{\text{Poisson}}^2$ . Les deux quantités présentent un comportement intermédiaire entre GOE et Poisson. Cet écart significatif aux comportements GOE indique clairement que le régime universel, où les modes ergodiques dominent, n'est pas encore atteint dans la gamme de fréquences correspondant à la première centaine de modes. Cependant, asymptotiquement, pour des longueurs d'ondes bien plus petites que le rayon de la demi-sphère, il est bien établi qu'une cavité de type Sinaï présente des fluctuations spectrales GOE [85, 93, 95]. En ajustant  $F_e$  par  $F_{\text{Weibull}}$  (2.13), on obtient  $\beta = 1.45$  et même en omettant les 60 ou 100 premiers modes, dont on sait qu'une majorité d'entre eux se comporte de manière très similaire à ceux de la cavité vide, on ne parvient pas à

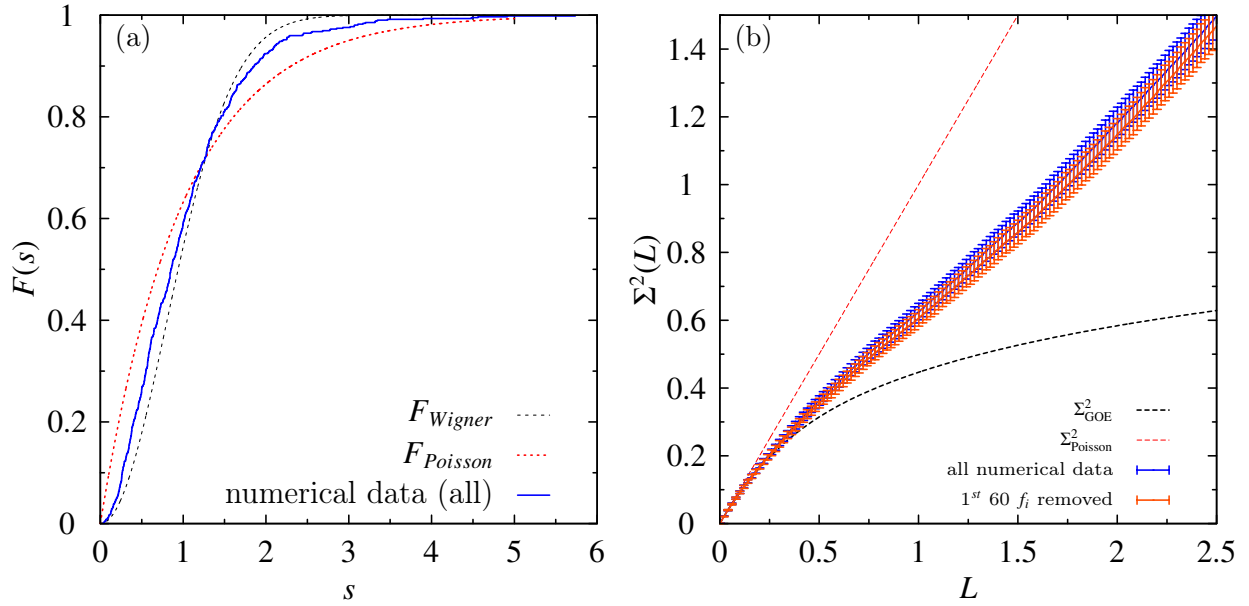


FIGURE 2.2 – **Test de chaoticité** : (a) Densité cumulée empirique  $F_e(s)$  (en bleu) pour les 681 premières fréquences propres redressées de la CR montrée dans la Figure 2.1.  $F_e(s)$  se trouve juste entre  $F_{Wigner}$  (en noir) et  $F_{Poisson}$  (en rouge). L'ajustement par  $F_{Wigner}$  des données numériques donne  $\beta = 1.45$ . (b) *Number variance*  $\Sigma^2(L)$  (en bleu) pour les mêmes données. Même en ometant les 60 premiers modes (données oranges) l'accord avec  $\Sigma_{GOE}^2$  est à peine amélioré.

dépasser  $\beta = 1.50$ , ni à améliorer significativement l'accord entre  $\Sigma^2(L)$  et  $\Sigma_{GOE}^2$  (courbe orange dans la Figure 2.2b).

Les déviations montrées par la Figure 2.2 sont dues au fait que, malgré la présence de l'hémisphère, la chambre continue de présenter certaines caractéristiques d'une cavité régulière, à savoir des surfaces de mur en vis à vis parallèles. Ces surfaces parallèles rendent possible l'existence dans la cavité d'une famille de modes réguliers : les modes tangentiels (*tangential modes* (TgM) en anglais). Ces TgM constituent la famille de mode non-génériques la plus importante statistiquement, ils sont associés dans la limite géométrique à des trajectoires de rayons appartenant à des familles continues d'orbites périodiques marginalement stables "confinées" dans des plans délimités par des paires de murs parallèles et sont donc aux cavités EM 3D ce que les *bouncing ball modes* sont au billards quantiques 2D [98, 99]. Dans la cavité vide, ils correspondent aux modes dont une seule



des composantes du vecteur d'onde est nulle. Les composantes non nulles sont quant à elles quantifiées dans les plans parallèles aux murs de la cavité comme ceux montrés dans la Figure 2.1. On distingue donc trois familles de TgM et un même mode tangentiel de la cavité peut appartenir à plus d'une famille à la fois. Comme mentionné plus haut, la présence de modes non-génériques induit des fluctuations à longue échelle de  $\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f)$ , fluctuations caractérisées par  $\mathcal{N}^{\text{non-gén}}(f)$  (équation (2.3)). Si les modes tangentiels sont les modes non-génériques majoritaires,

$$\mathcal{N}^{\text{non-gén}}(f) \simeq \mathcal{N}^{\text{TgM}}(f) = \mathcal{N}_t - \mathcal{N}_t^{\text{av}}(f), \quad (2.14)$$

où  $\mathcal{N}_t$  est la fonction de comptage des TgM et  $\mathcal{N}_t^{\text{av}}$  son comportement moyen dépendant de  $f$ . La fonction de comptage pour les TgM perpendiculaires à l'axe  $z$  de la cavité (plan rouge de la Figure 2.1) peut être obtenue par une approche semi-classique en suivant la procédure introduite dans la référence [94]. Celle-ci consiste à chercher tous les vecteurs d'ondes de norme inférieure ou égale à  $k = 2\pi f/c$ , ayant leurs deux composantes  $k_x$  et  $k_y$  quantifiées dans les plans d'intersection entre la cavité et les plans  $z = cst$ , la composante selon  $z$  restant sans contraintes, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\mathcal{N}_t^z(k) = \sum_{\mu, \nu} \int \frac{dz}{2\pi} \int dk_z \Theta(k^2 - k_{x\mu}^2 - k_{y\nu}^2 - k_z^2) \quad (2.15)$$

avec  $k_{x\mu} = \mu\pi/l_x(z)$ ,  $k_{y\nu} = \nu\pi/l_y(z)$ . L'intégration selon  $k_z$  est assez simple et donne :

$$\mathcal{N}_t^z(k) = \sum_{k^2 \geq k_{x\mu}^2 + k_{y\nu}^2} \int \frac{dz}{\pi} \sqrt{k^2 - k_{x\mu}^2 - k_{y\nu}^2} \quad (2.16)$$

Pour la dernière intégrale, hormis dans la zone où se trouve la demi-sphère, l'intersection entre les plans  $z = cst$  et la cavité est invariante par translation suivant l'axe  $z$ , on va alors supposer que  $l_x(z) = L_x$  et  $l_y(z) = L_y$  et réaliser l'intégrale selon  $z$  de  $z = 0$  à  $z = L_z$ . Cette approximation est ensuite pondérée par un paramètre ajustable  $\lambda_z$ , afin de

rendre compte de la présence de la demi-sphère qui limite le développement de TgM selon  $z$ . Finalement on obtient :

$$\mathcal{N}_t^z(k) = \lambda_z \frac{L_z}{\pi} \sum_{k^2 \geq \left(\frac{\mu\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\nu\pi}{L_y}\right)^2} \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{\nu\pi}{L_y}\right)^2} \quad (2.17)$$

Les fonctions de comptages pour les deux autres familles de TgM,  $\mathcal{N}_t^x$  et  $\mathcal{N}_t^y$ , sont simplement déduites par permutation circulaire des indices de l'équation (2.17). Le comportement moyen,  $\mathcal{N}_t^{\text{av}}(f)$ , de la fonction de comptage totale,  $\mathcal{N}_t(f) = \mathcal{N}_t^x(f) + \mathcal{N}_t^y(f) + \mathcal{N}_t^z(f)$ , en fonction de la fréquence  $f$ , peut être ajustée par un polynôme de degré 3 sans terme du second degré. Connaissant maintenant  $\mathcal{N}_t(f)$  et  $\mathcal{N}_t^{\text{av}}(f)$ , on peut calculer  $\mathcal{N}^{\text{TgM}}(f)$  (équation (2.14)). Dans la Figure 2.3, cette dernière (courbe en trait plein rouge) est comparée aux fluctuations de  $\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f)$  (courbe en pointillés noirs). Cette comparaison montre clairement que les modes tangentiels sont responsables des fluctuations non- universelles, de grandes amplitudes et à grande échelle de la fonction de comptage.

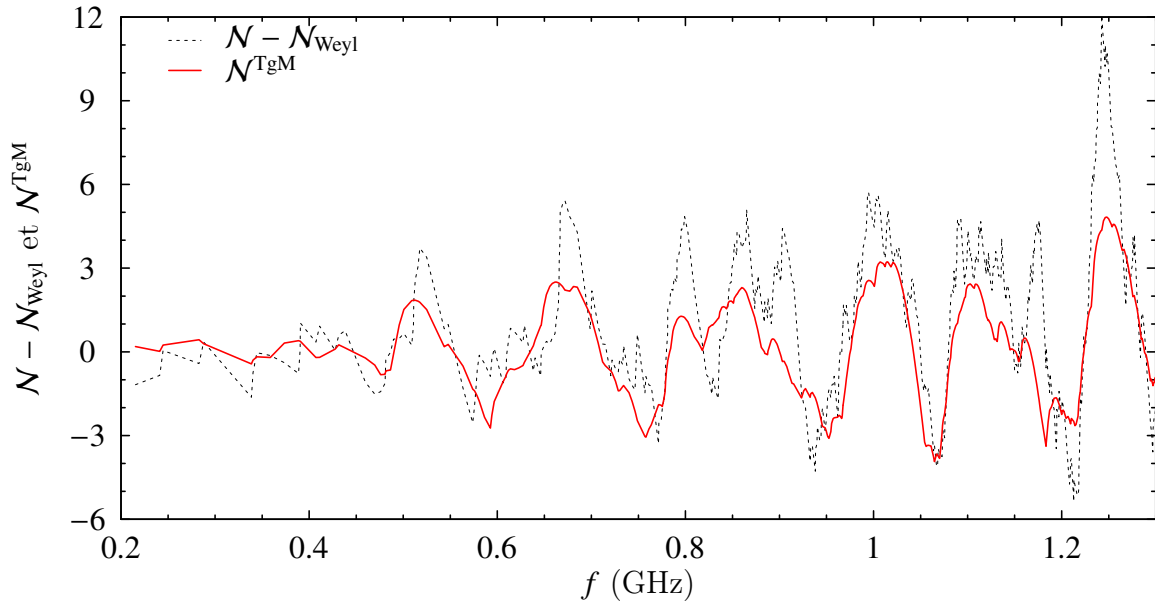


FIGURE 2.3 – Contribution des TgM,  $\mathcal{N}^{\text{TgM}}$ , aux fluctuations de  $\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\text{Weyl}}$

Ces résultats indiquent que l'ajout d'une seule demi-sphère n'est pas suffisant pour rendre

complètement chaotique une CR parallélépipédique dès les premières centaines de modes, car elle laisse des fractions non négligeables de quatre surfaces adjacentes deux à deux parallèles, permettant l'existence de modes tangentiels.

### 2.2.2 Un bon compromis

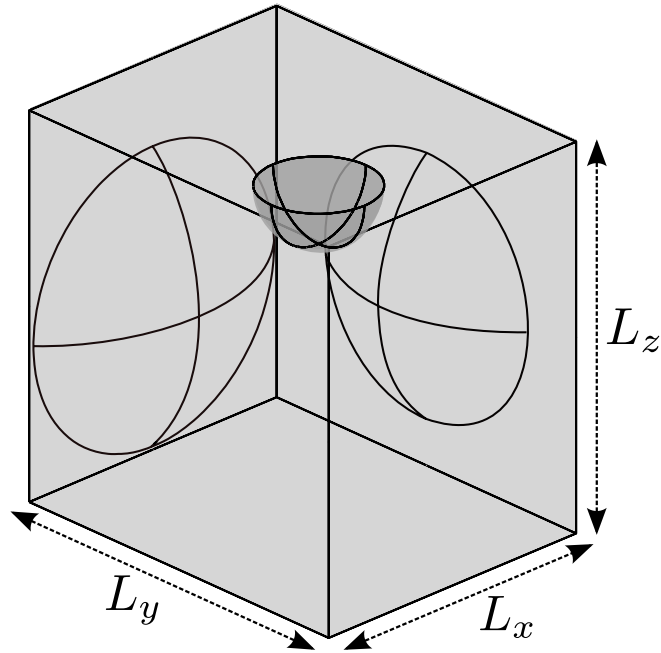


FIGURE 2.4 – Une CR parallélépipédique rendue complètement chaotique par l'ajout d'une hémisphère et de 2 calottes sphériques visant à réduire les surfaces adjacentes deux à deux parallèles.

Une amélioration importante de la chaoticité de la CR (Figure 2.1) est obtenue en y introduisant deux calottes sphériques d'un rayon respectif de 55 cm et 45 cm (Figure 2.4). Les deux calottes ne sont pas centrées et elles pénètrent au plus de 15 cm dans la CR. Ainsi le volume utile n'est pas significativement réduit alors que le nombre de surfaces encore parallèles, à l'origine de modes tangentiels, est quant à lui, drastiquement diminué. Le test de chaoticité de cette CR est réalisé sur les 571 premières fréquences propres. Les résultats obtenus, présentés dans la Figure 2.5, sont très proches de ceux attendus dans une cavité

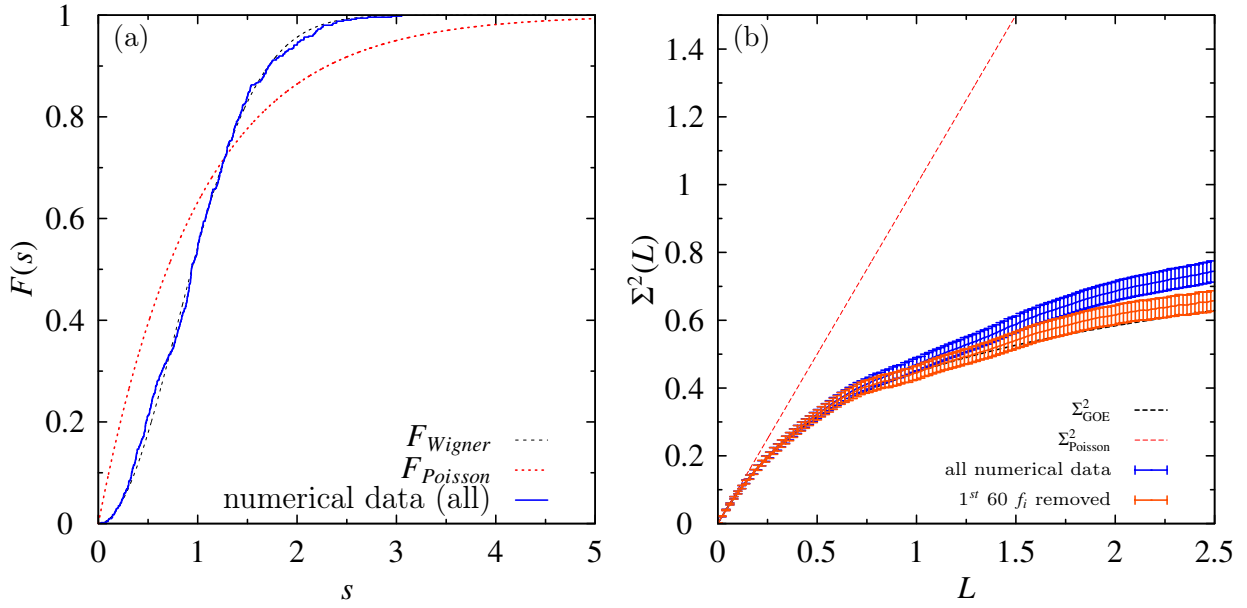


FIGURE 2.5 – **Test de chaoticité** : (a) Densité cumulée empirique  $F_e(s)$  (en bleu) pour les 571 premières fréquences propre redressées de la CR montrée en Figure 2.4. L'ajustement par  $F_{Weibull}$  des données numériques donne  $\beta = 1.86$ . (b) *Number variance*  $\Sigma^2(L)$  (en bleu) pour les mêmes données. En omettant les 60 premiers modes (données oranges) l'accord avec  $\Sigma_{GOE}^2$  est parfait (aux erreurs statistiques près).

complètement chaotique dans le régime universel. En effet, le paramètre de Weibull atteint maintenant  $\beta = 1.86$  et présente donc un écart relatif à  $\beta_{GOE}$  (2.2) de seulement 4.7%. (Figure 2.5a). Comparé à la CR avec une seule hémisphère, le comportement de  $\Sigma^2(L)$  (courbe en bleu) est nettement amélioré (Figure 2.5b). Néanmoins, on peut observer un écart encore non-négligeable entre  $\Sigma^2(L)$  et  $\Sigma_{GOE}^2$  alors que la densité cumulée empirique  $F_e(s)$  (courbe bleu) est pratiquement indiscernable de  $F_{Wigner}(s)$ . Le *number variance* est une quantité connue pour être plus sensible à la présence de modes non-ergodiques que le  $P(s)$  [93, 96]. Ceci est lié aux faits que  $\Sigma^2(L)$  rend compte des corrélations à longues portées du spectre redressé et que les modes non-génériques sont justement responsables de fluctuations à grande échelle dans ce spectre. Ainsi, même si la NNSD semble conclure que la cavité est complètement chaotique et ne présente donc pas ou très peu de modes non-ergodiques, il est utile de vérifier, lorsque le spectre à disposition est suffisamment grand, que  $\Sigma^2(L)$  est proche du  $\Sigma_{GOE}^2$ . Dans le cas contraire, cela signifie que même

s'ils sont suffisamment rares pour ne pas perturber localement le spectre, des modes non génériques sont tout de même présents en nombre suffisant dans la séquence considérée pour influencer les corrélations à longues portées du spectre redressé. Si on omet les 60 premiers modes de la CR présentée dans la Figure 2.4, l'accord entre  $\Sigma_{\text{GOE}}^2$  (tirets noirs dans la Figure 2.5b) et  $\Sigma^2(L)$  (courbe orange de la même figure) est presque parfait. En effet, la courbe noire passe par les barres d'erreurs de  $\Sigma^2(L)$ . Pour information, dans ce cas  $\beta = 1.91$ .

Ces résultats démontrent, qu'à partir du 60<sup>e</sup> mode, la cavité montrée dans la Figure 2.4 et obtenue par des modifications simples visant à réduire les surfaces de murs parallèles de la cavité parallélépipédique, est une excellente réalisation pratique d'une CR chaotique.

### 2.2.3 Distribution spatiale des champs propres

Les propriétés statistiques spectrales et spatiales d'une cavité chaotique sont intimement liées. Si le spectre de celle-ci suit les prédictions GOE alors on doit s'attendre à ce que ses modes soient ergodiques et donc statistiquement uniformes et isotropes. Pour une cavité chaotique sans pertes décrite par un champ scalaire, la correspondance entre la distribution des composantes des vecteurs propres des matrices GOE et celle de l'amplitude des champs propres dans la cavité est directe : tous les modes de la cavité sont réels et leurs amplitudes distribuées selon une même loi normale. Pour un champ propre vectoriel d'une cavité chaotique EM 3D sans pertes, ce sont les composantes cartésiennes qui vérifient les prédictions obtenues sur les vecteurs propres des matrices aléatoires GOE [52, 96]. Si la cavité est complètement chaotique et ne présente aucun mode non générique, l'isotropie supposée implique que toutes les composantes cartésiennes d'un mode donné soient associées à une même loi normale. Comme on considère ici des systèmes sans pertes, cette loi normale est la même pour chaque mode  $\vec{E}_n$  de la cavité à condition que ces derniers

soient normalisés de la même façon :

$$\int_V ||\vec{E}_n(r)||^2 d\vec{r} = 1. \quad (2.18)$$

En résumé, si la variable  $E_{n,a}$  représente l'ensemble des valeurs prises par les composantes cartésiennes ( $a = x, y$  ou  $z$ ) des champs propres ( $\vec{E}_n(\vec{r})$ ) identiquement normalisés (2.18), alors la variable normalisée  $\tilde{E}_{n,a}$  définie par,

$$\tilde{E}_{n,a} = \frac{E_{n,a}}{\sqrt{\langle E_{n,a}^2 \rangle_{n,a}}}, \quad (2.19)$$

où  $\langle \dots \rangle_{n,a}$  est la moyenne sur l'ensemble des modes  $n$  et des composantes cartésiennes  $a$ , suit une loi normale centrée réduite lorsque la cavité est complètement chaotique. Si une des hypothèses sous-jacentes, à savoir l'ergodicité ou l'isotropie, n'est pas vérifiée par un nombre suffisant de modes, la distribution de  $\tilde{E}_{n,a}$  s'écarte significativement de la loi normale attendue. Précisons tout de même que pour un champ propre donné  $\vec{E}_n$ , les valeurs des composantes cartésiennes intervenant dans  $\vec{E}_{n,a}$  doivent être prises dans un volume distant d'au moins  $\lambda_n/4$  des bords de la cavité, où  $\lambda_n = c/f_n$  est la longueur d'onde associée au mode. En effet, il a été démontré qu'à proximité des bords, la distribution des champs propres d'une cavité chaotique s'écarte d'une loi gaussienne [89].

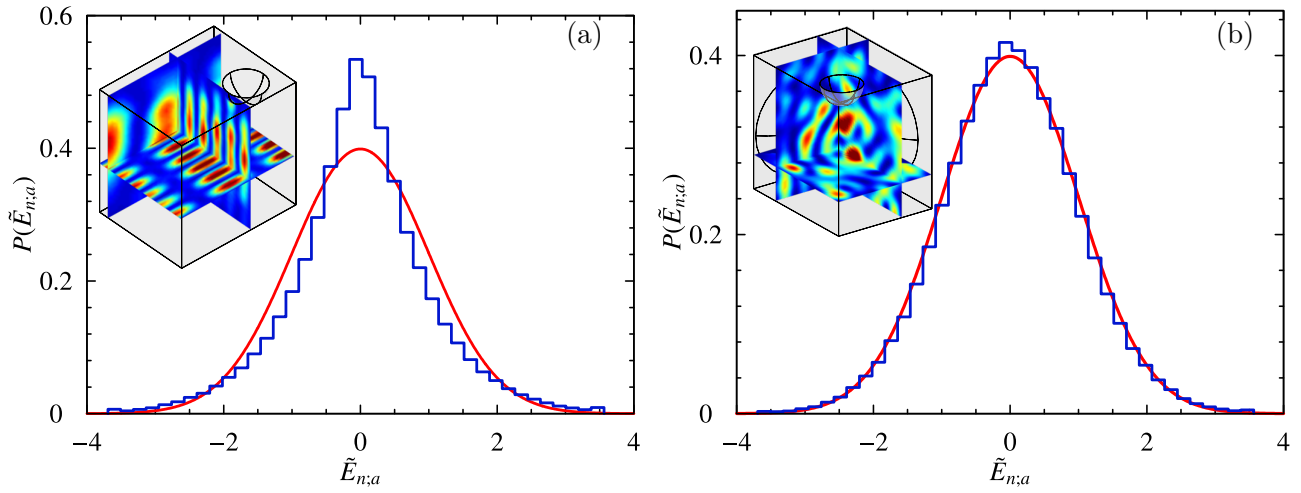


FIGURE 2.6 – Statistique spatiale des champ propres

Les Figures 2.6a et 2.6b comparent respectivement les distributions  $P(\tilde{E}_{n,a})$  des composantes cartésiennes normalisées des modes de la cavité avec une demi-sphère (Figure 2.1) et des modes de la cavité avec 1 demi-sphère et 2 calottes sphériques (Figure 2.4) (histogrammes en bleu) avec la loi normale centrée réduite (courbes rouges). Pour chacune des CR,  $\tilde{E}_{n,a}$  est construit à partir des 3 composantes cartésiennes des champs propres  $\vec{E}_n(\vec{r})$ ,  $n$  allant de 60 à 500, calculés par FEM et normalisés selon (2.18). Une fois normalisés, les champs propres sont évalués sur une grille régulière de 512 points à l'intérieur d'un volume éloigné des bords de la cavité d'une distance égale à  $\lambda_{60}/4$ ,  $\lambda_{60}$  étant la longueur d'onde du 60<sup>e</sup> mode de la cavité considérée. Comme les résultats spectraux pouvaient le laisser présager, seule la cavité avec les calottes et la demi-sphère dont le spectre est en accord avec la prédiction GOE, semble suivre une loi normale centrée réduite. Cet accord prouve que les modes de cette CR sont majoritairement des modes ergodiques (et isotropes), modes dont la cartographie du carré de la norme du champ propre  $\|\vec{E}_n(\vec{r})\|^2$  de l'un de ses représentants est montrée en insert de la Figure 2.6b. Le net écart de la distribution  $P(\tilde{E}_{n,a})$ , associée à la cavité avec une seule demi-sphère, avec la loi normale attendue est bien entendu dû au nombre statistiquement important de modes tangentiels. La cartographie de l'un de ces modes non-génériques est montrée en insert de la

Figure 2.6a. Spatialement, ce mode a bien les caractéristiques d'un mode d'une cavité régulière parallélépipédique : il n'est ni isotrope ni uniforme.

Ces résultats démontrent la pertinence des outils spectraux utilisés dans la section précédente pour confirmer la présence ou non de modes ergodiques statistiquement majoritaires sachant qu'une déviation importante par rapport aux prédictions GOE est un indicateur spectral de la présence d'un nombre statistiquement non négligeable de modes qui ne sont spatialement ni uniformes, ni isotropes.

## 2.3 Application à une CR commerciale (ESYCOM) - modélisation numérique

Nous allons à présent utiliser les outils spectraux de la TMA pour trouver le nombre minimum de modifications qu'il faut appliquer à une CR conventionnelle donnée pour la rendre chaotique. Les dimensions de la cavité vide et la géométrie du brasseur de la CR que nous voulons modéliser (voir Figure 2.8) sont choisies pour correspondre à celles de la CR commerciale présente au laboratoire ESYCOM à Marne-la-Vallée ; CR dans laquelle nous avons mené nos études expérimentales et présentée plus en détail au chapitre 4. Pour rendre chaotique la CR nous disposerons sur des parois adjacentes des hémisphères métalliques (notées par la suite  $hs$ ) de 40 cm de rayon. L'utilisation d' $hs$  de cette dimension plutôt que des calottes sphériques permet de répondre aux contraintes pratiques et financières posées par la réalisation expérimentale d'une CR chaotique à partir de la CR commerciale de l'ESYCOM. Ces contraintes seront discutées dans le chapitre 4. Partant de la CR équipée seulement du brasseur, puis en lui ajoutant successivement 1, 2 puis 3  $hs$ , on calcule par FEM, pour chacune de ces configurations, les 800 premiers modes et leurs fréquences propres. La Figure 2.7 compare simultanément les prédictions des matrices aléatoires et les *number variance*,  $\Sigma^2(L)$  déduits des spectres redressés de chacune de ces CR. Pour chaque spectre on omet les 60 premiers modes. Les coefficients



de Weibull  $\beta$ , obtenus en ajustant les  $F_e(s)$  associées aux même spectres tronqués, sont inscrits dans la légende de la Figure 2.7.

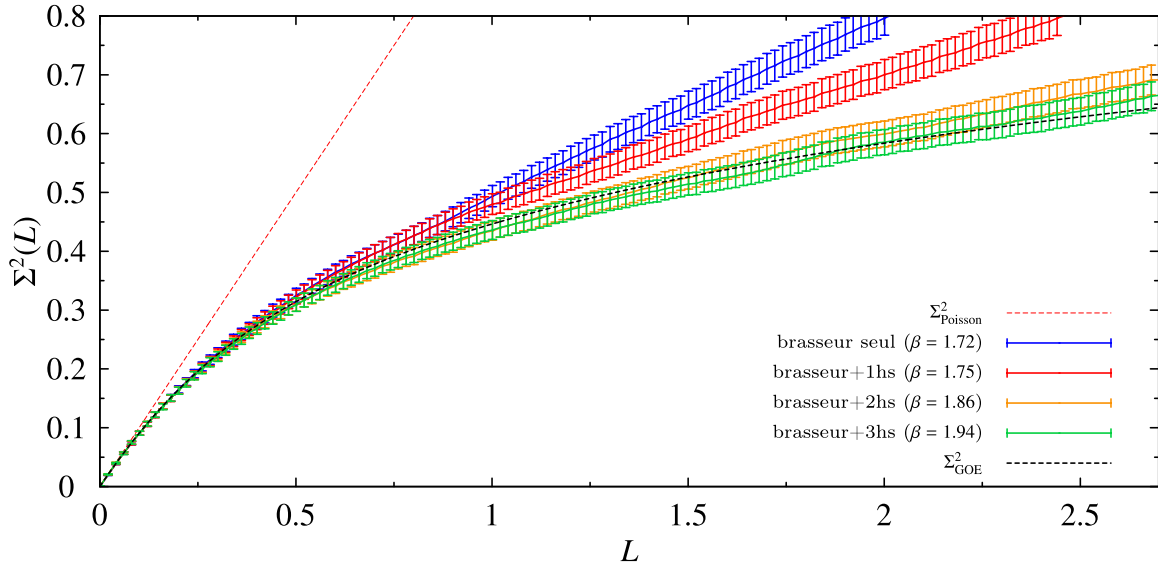


FIGURE 2.7 – **D’une CR conventionnelle vers une CR chaotique.**

Comparaison des  $\Sigma^2(L)$  déduits en omettant les 60 premières fréquences propres des spectres redressés associés aux 800 premiers modes de chaque CR. Sont également notés en légende, les coefficients de Weibull,  $\beta$ , correspondant aux mêmes données.

Cette figure montre la convergence des  $\Sigma^2(L)$  vers  $\Sigma_{\text{GOE}}^2$  lorsque le nombre de  $hs$  dans la cavité augmente. Les coefficients de Weibull suivent la même tendance, il tendent vers  $\beta_{\text{GOE}}$ , commençant à  $\beta = 1.72$  (12% d’écart), pour la CR avec le brasseur seul et finissant à  $\beta = 1.94$  (0.6% d’écart), pour la CR équipée des 3 demi-sphères. Dans le cas de la cavité équipée du brasseur et des  $3hs$ , l’accord entre  $\Sigma^2(L)$  et  $\Sigma_{\text{GOE}}^2$  est quasiment parfait, aux erreurs statistiques près. Ceci permet de conclure que pour rendre chaotique la CR de l’ESYCOM dès les premières centaines de modes, on doit lui ajouter au moins 3 hémisphères (Figure 2.8).

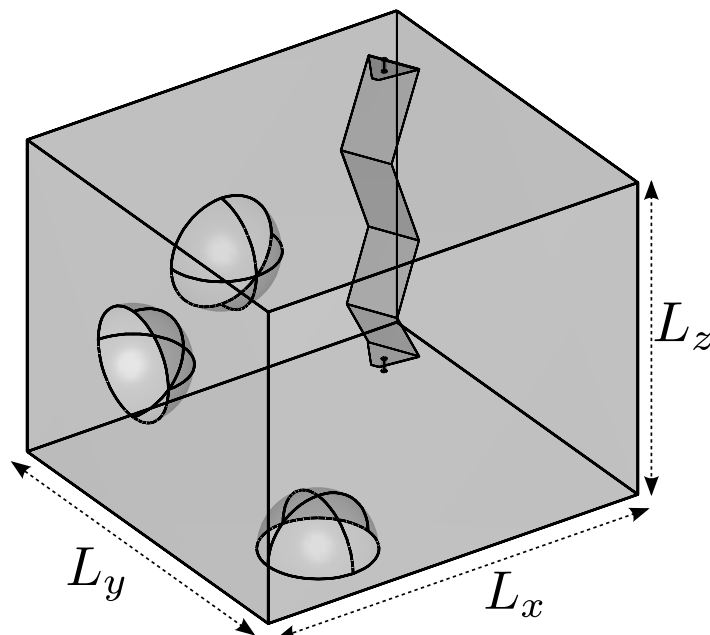


FIGURE 2.8 – **CR conventionnelle rendue chaotique** par l'ajout de 3 hémisphères métalliques de 40 cm de rayon sur 3 parois adjacentes. Les dimensions de la cavité vide ( $L_x = 2.951$  m,  $L_y = 2.751$  m et  $L_z = 2.354$  m) et la géométrie du brasseur sont celles de la CR expérimentale de l'Esycom présentée plus en détail dans le chapitre 4. Le volume de la CR conventionnelle (sans les hémisphères) est de  $19.1 \text{ m}^3$

Il est important ici de faire quelques remarques et comparaisons avec les résultats précédents. Dans la CR modélisée et présentée dans la Figure 2.8, ni le brasseur ni les demi-sphères sont positionnés au même endroit que dans la CR expérimentale. Si la CR est complètement chaotique, les positions du brasseur et des 3 *hs* n'ont pas réellement d'importance du fait de l'ergodicité des systèmes chaotiques qui induit que si la CR est chaotique pour une position donnée de ces éléments elle le sera pour toutes autres positions. Cependant en ce qui concerne le brasseur, la seule contrainte que l'on impose est de le placer, comme dans la CR expérimentale, à proximité d'un coin de la cavité, ceci ayant pour principale conséquence de laisser d'importantes surfaces de murs en vis-à-vis parallèles permettant l'existence de modes non-génériques éloignant la CR du comportement universel prédit par GOE. Ensuite, comme pour la CR montrée dans la Figure 2.1, les modes non génériques qui éloignent la CR conventionnelle (sans les demi-sphères) du

régime universel sont, comme on peut s'y attendre, des modes tangentiels (voir insert de la Figure 2.9a). Ceux-ci sont à l'origine de l'écart à la loi normale de la distribution des composantes cartésiennes normalisées (2.19) des champs propres (Figure 2.9a).

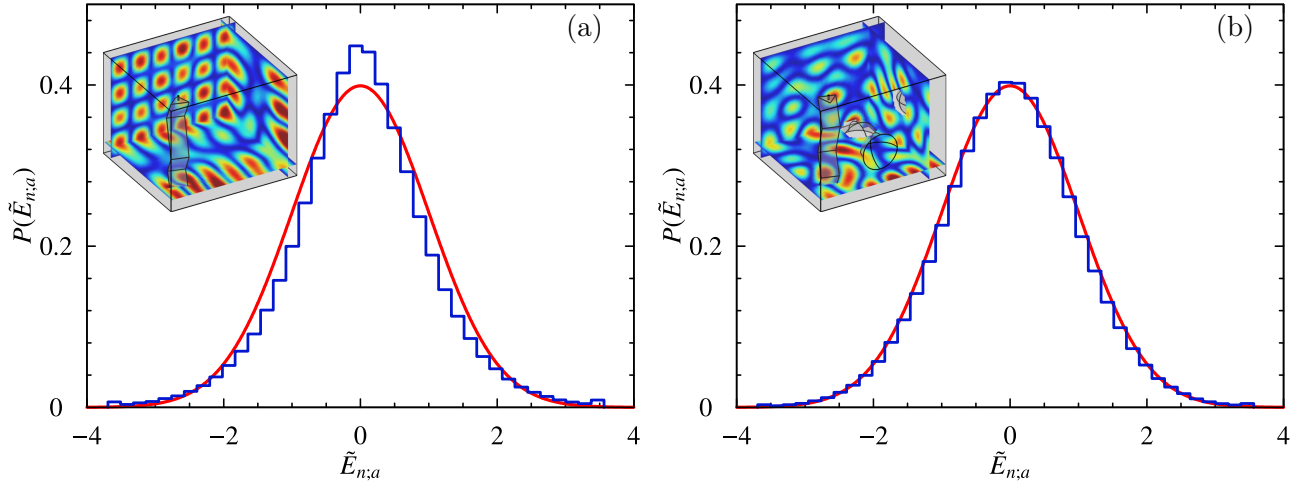


FIGURE 2.9 – **Distributions des composantes cartésiennes normalisées (2.19) des champs propres** de la CR commerciale (a), et de la CR rendue chaotique (b). En rouge la loi normale réduite centrée attendue pour une cavité complètement chaotique. En insert de la Figure (a), la distribution spatiale d'un des TgM responsable de l'écart à la loi normale. En insert de la Figure (b), la distribution spatiale d'un mode générique de la CR chaotique.

La CR commerciale et ses dérivées non chaotiques affichent des comportements statistiques spectraux (courbes bleues, rouges et oranges de la Figure 2.7) et spatiaux (Figure 2.9a) qualitativement similaires à ceux suivis par la CR de la Figure 2.1 et montrés dans les Figures 2.2 et 2.6a. On peut donc inférer qu'aussi nombreux et aussi complexes que soient le ou les brasseurs, s'ils laissent suffisamment de surfaces adjacentes et parallèles deux à deux, alors la cavité présente un nombre statistiquement non négligeable de modes tangentiels, ressemblant "trait pour trait" aux modes de la cavité régulière servant de base à la CR, et entraînant des comportements statistiques non universels. Enfin, on remarquera que, bien que géométriquement différentes, les deux CR rendues chaotiques (Figures 2.4 et 2.8) sont, du fait de l'universalité des cavités chaotiques, effectivement statistiquement équivalentes et cela aussi bien spectralement (courbe verte Figure 2.7

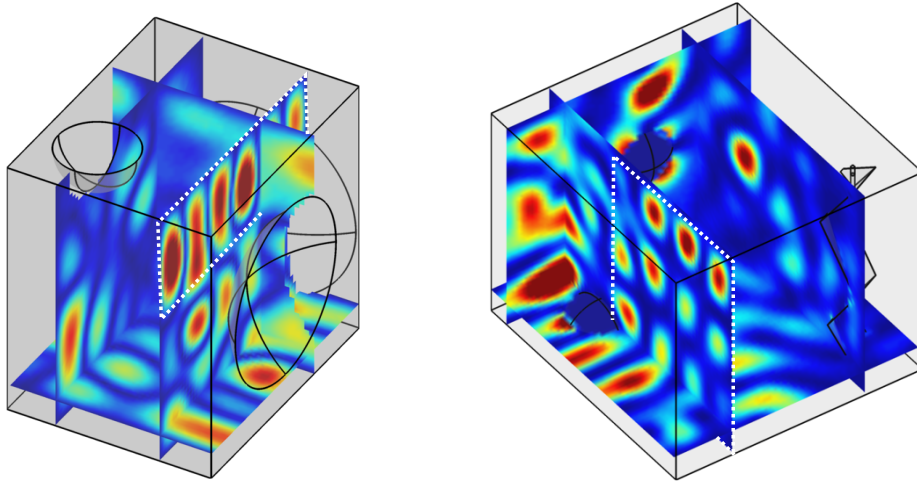


FIGURE 2.10 – Modes non-générique des deux CR chaotiques

et Figure 2.5) que spatialement (Figure 2.9b et Figure 2.6b). On notera tout de même la présence de quelques modes non génériques qui ne présentent une structure régulière (encadrée en blanc dans la Figure 2.10), que localement, entre deux surfaces qui sont encore parallèles. Ces modes sont responsables du léger écart des distributions  $P(\tilde{E}_{n,a})$  à la loi normale théorique (histogrammes légèrement à l'intérieur des courbes rouges). Ceci est une nouvelle preuve de la nécessité de réduire le nombre de surfaces parallèles dans la cavité pour la rendre chaotique. Les deux CR (Figures 2.4 et 2.8 ) sont donc un excellent compromis entre une CR complètement chaotique mais à la géométrie très complexe sans aucunes surfaces parallèles et une CR rendue chaotique par un nombre minimum de modifications géométriquement simples mais pouvant exhiber encore quelques surfaces parallèles.

## Chapitre 3

# Modélisation des pertes par la TMA - Le formalisme de l'hamiltonien effectif pour les ondes scalaires

Dans le chapitre précédent, les simulations de cavités EM 3D "idéales" (sans pertes) ont permis d'étudier leur chaotité. Cependant ce type de modélisation n'est pas suffisant pour prédire le comportement statistique des CR expérimentales. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre 1, les pertes y jouent un rôle non négligeable [35, 43, 100]. Il est donc absolument nécessaire de les prendre en compte. Dans le présent chapitre, nous allons introduire le formalisme de l'hamiltonien effectif, noté  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ . Celui-ci a d'abord été introduit dans le contexte de la physique nucléaire, afin de décrire la physique des noyaux composés (voir par exemple [101–103] ou, pour des revues plus récentes, [104, 105]). De manière plus générale, depuis le milieu des années 90, ce formalisme basé sur la théorie de la "diffusion" (*scattering*) est couramment utilisé pour caractériser et modéliser les systèmes ondulatoires ouverts (voir par exemple [106] ou, dans le cas particulier des cavités micro-ondes, [107] et le chapitre 3 de la référence [19]). Associé aux ensembles appropriés de matrices aléatoires [102, 103, 108], il permet d'étendre l'emploi de

la TMA aux systèmes ondulatoires chaotiques ouverts et devient alors un outil extrêmement puissant pour prédire les comportements statistiques universels spectral et spatial de ces systèmes [109–111]. Les cavités micro-ondes quasi- bidimensionnelles sont très souvent utilisées pour vérifier expérimentalement (et/ou numériquement) les prédictions de la TMA appliquée à  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  [92]. Dans le présent chapitre, nous nous intéresserons au cas de champs scalaires avant d'étendre ces résultats au cas de champs vectoriels en cavités EM 3D au chapitre suivant.

### 3.1 Cavité EM en présence de pertes : modélisation et généralités

Dans une cavité EM, les pertes sont dues par exemple au couplage avec les antennes [93, 107], à l'utilisation d'un guide d'onde pour injecter le champ [112], ou encore aux pertes ohmiques engendrées par la conductivité finie des parois [107]. Qu'ils soient liés aux systèmes de mesure ou à la cavité elle-même, tous ces mécanismes de pertes ouvrent le système en le couplant à son environnement. Le spectre discret et réel du système fermé, associé à des champs propres réels, est alors transformé en une somme de résonances se recouvrant, associées à des champs propres à valeurs complexes, appelés états quasi-stationnaires ou états de résonance. Physiquement, cela signifie que les résonances ont des durées de vie limitées et que le champ dans la cavité est une somme d'ondes stationnaires et d'ondes progressives entraînant l'existence de courant<sup>1</sup> dans la cavité [113–115]. L'étude d'un système ouvert nécessite de prendre en compte des phénomènes et quantités absents des systèmes fermés (largeurs de résonance [116, 117], piégeage de résonance ou *resonance trapping* [103, 112], distribution de courant [114], etc.) et d'analyser les modifications engendrées par les pertes sur des quantités telles que la NNSD [118], les croisements

---

1. On entend par courant : "densité de courant" dans un contexte quantique ou vecteur de Poynting dans le contexte EM.

évités [119, 120], ou encore les distributions et corrélations spatiales des champs dans la cavité [121].

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons introduire le formalisme de l'hamiltonien effectif permettant une représentation unifiée des différents mécanismes de pertes mis en jeu dans une cavité. Puis nous montrerons que ce formalisme permet, en théorie, de rendre compte de la réponse d'un système ouvert à une excitation provoquée par tout type de sources. Enfin dans les dernières parties, nous montrerons comment peuvent être distinguées deux catégories de pertes (dites homogènes ou inhomogènes) et nous introduirons deux quantités appelées paramètre de complexité et rigidité de phase ou *phase rigidity*<sup>2</sup>, qui permettent de caractériser l'impact des pertes à la fois sur les champs propres d'une cavité ouverte et sur sa réponse.

### 3.1.1 Système ouvert : un problème de diffusion

En décrivant, comme en physique nucléaire [101, 105], les différents mécanismes de couplage d'une cavité avec son environnement par un nombre approprié de canaux de fuite différemment couplés, on obtient une représentation unifiée des pertes [107, 108]. Pour analyser leur influence sur la physique de cette cavité, on peut alors utiliser les outils introduits par la théorie de la diffusion (*scattering*), dont l'élément central est la matrice de diffusion  $S$ . Supposons que la cavité soit couplée à son environnement par  $M$  canaux de fuites, la matrice  $S(E)$ , de dimension  $M \times M$ , lie linéairement les amplitudes des ondes entrantes et sortantes de la cavité pour une énergie donnée  $E$ . On peut alors écrire<sup>3</sup>,

$$|B(E)\rangle = S(E)|A(E)\rangle \quad (3.1)$$

---

2. L'expression française étant peu courante on lui préférera la version anglaise de *phase rigidity*.

3. On utilise ici par commodité le formalisme de la mécanique quantique. Pour passer de la variable énergie  $E$  à la variable nombre d'onde  $k$ , il suffit d'appliquer la transformation  $E \rightarrow k^2$  et de prendre garde que pour des ondes classiques non dispersives on a  $k = \omega/c$  tandis que pour des ondes quantiques  $\omega = \hbar k^2/2m$ .

où  $|A(E)\rangle = \sum_{c=1}^M A_c |\mathcal{C}_c(E)\rangle$  et  $|B(E)\rangle = \sum_{c=1}^M B_c |\mathcal{C}_c(E)\rangle$ , représentent respectivement la décomposition des ondes entrantes et sortantes dans la base des canaux  $\{|\mathcal{C}_c(E)\rangle\}$ . L'expression complète de la matrice  $S(E)$  peut être dérivée à partir des états propres de l'hamiltonien du système complet,

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H} + \mathcal{H}_c(E) + \mathcal{U}(E) \quad (3.2)$$

qui prend en compte à la fois l'hamiltonien de la cavité fermé  $\mathcal{H}$ , l'hamiltonien décrivant les canaux  $\mathcal{H}_c$  et les interactions  $\mathcal{U}$  entre la cavité et les canaux. En supposant que le système fermé possède  $N$  niveaux (avec  $N \gg 1$  et pouvant tendre vers l'infini), associés à une base de  $N$  vecteurs propres, notée  $\{|n\rangle\}$ , on peut alors écrire

$$\mathcal{H} = \sum_{n,p=1}^N |n\rangle \mathcal{H}_{np} \langle p| \quad (3.3)$$

avec  $\langle n|p\rangle = \delta_{np}$ . De même on peut écrire  $\mathcal{H}_c(E)$  dans la base des canaux  $\{|\mathcal{C}_c(E)\rangle\}$ ,

$$\mathcal{H}_c(E) = \sum_{c=1}^M \int dE |\mathcal{C}_c(E)\rangle E \langle \mathcal{C}_c(E)| \quad (3.4)$$

avec  $\langle \mathcal{C}_c(E)|\mathcal{C}_d(E')\rangle = \delta_{cd} \delta(E - E')$ . En ce qui concerne le couplage entre les éléments de  $\{|\mathcal{C}_c(E)\rangle\}$  et  $\{|n\rangle\}$ , il peut s'écrire

$$\mathcal{U}(E) = \sum_{c=1}^M \sum_{n=1}^N \int dE [|n\rangle \mathcal{V}_{nc}(E) \langle \mathcal{C}_c(E)| + |\mathcal{C}_c(E)\rangle \mathcal{V}_{nc}^*(E) \langle n|] \quad (3.5)$$

où les  $\mathcal{V}_{nc}(E)$  sont les éléments de la matrice de couplage  $\mathcal{V}(E)$ , de dimension  $N \times M$ , couplant le  $n$ -ème vecteur propre de  $\mathcal{H}$  au  $c$ -ième canal de  $\mathcal{H}_c$ . On peut remarquer que dans (3.5), les termes  $|n\rangle \mathcal{V}_{nc}(E) \langle \mathcal{C}_c(E)|$  correspondent aux couplages des canaux vers la cavité tandis que  $|\mathcal{C}_c(E)\rangle \mathcal{V}_{nc}^*(E) \langle n|$  correspondent aux couplages de la cavité vers les canaux. On



néglige donc ici les couplages direct entre canaux. À l'exception des canaux pouvant être associés à des antennes séparées d'une distance plus petite que la longueur d'onde (voir chapitre 4 de [19]), cette hypothèse est raisonnablement vérifiée par les différents types de canaux d'une cavité EM ouverte. La dérivation de  $S(E)$  à partir de  $\mathcal{H}_{\text{tot}}$  étant relativement longue, on ne rapporte ici que le résultat final. Le lecteur intéressé par les détails du calcul pourront au choix consulter les références [106] (pages 222-230), [105] (pages 16-21) et [19] (chapitre 3) pour une approche plus directement appliquée au domaine des cavités EM. Si tous les éléments de la matrice de couplage varient sur une échelle d'énergie beaucoup plus grande que l'espacement moyen entre résonances (i.e. si on se place sur un intervalle d'énergie restreint sur lequel la densité modale est suffisamment élevée), la dépendance en énergie de la matrice de couplage peut être négligée [106] et la matrice de diffusion s'écrit alors :

$$S(E) = \mathbb{1}_M - i\mathcal{V}^\dagger \frac{1}{E - \mathcal{H} + (i/2)\mathcal{W}} \mathcal{V}, \quad (3.6)$$

avec  $\mathbb{1}_M$  la matrice identité de taille  $M$ ,  $\mathcal{H}$  l'hamiltonien du système fermé et  $\mathcal{W}$  un opérateur hermitien lié au couplage avec les canaux par [102, 103] :

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger. \quad (3.7)$$

La relation (3.7) est une conséquence directe de l'unitarité de  $S$ . La matrice  $S$  est donc entièrement définie par la matrice de couplage et l'hamiltonien du système fermé. Si  $\mathcal{H}$  est de taille  $N$ , alors  $S$  possède  $N$  pôles complexes, notés

$$\varepsilon_n = \tilde{\varepsilon}_n - i\frac{\Gamma_n^\varepsilon}{2}. \quad (3.8)$$

Chacun des pôles est associé à une des résonances de la cavité ; la partie réelle  $\text{Re}[\varepsilon_n] = \tilde{\varepsilon}_n$  et  $-2\text{Im}[\varepsilon_n] = \Gamma_n^\varepsilon$  donnent respectivement le centre et la largeur de la  $n$ -ème résonance<sup>4</sup>.

---

4. Remarque : Pour une cavité EM, la transformation  $\varepsilon_n \rightarrow k_n^2$ , avec  $k_n = 2\pi c^{-1}(f_n - i\Gamma_n^f/2)$ , relie le  $n$ -ème pôle de  $S$  à la fréquence centrale ( $f_n$ ) et la largeur en fréquences ( $\Gamma_n^f$ ) de la  $n$ -ème résonance.

Les  $\{\varepsilon_n\}$  correspondent aux valeurs propres d'un opérateur non-hermitien, l'hamiltonien effectif du système ouvert [102, 103, 106] :

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H} - \frac{i}{2}\mathcal{W}. \quad (3.9)$$

Du fait de sa non-hermiticité,  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  est diagonalisable par deux bases distinctes de vecteurs propres complexes, appelés Gauches (*Left*)  $\{\langle L_n| \}$  et Droites (*Right*)  $\{|R_n\rangle\}$ , vérifiant respectivement

$$\langle L_n|\mathcal{H}_{\text{eff}} = \varepsilon_n \langle L_n| \text{ et } \mathcal{H}_{\text{eff}}|R_n\rangle = \varepsilon_n |R_n\rangle. \quad (3.10)$$

Ces vecteurs propres complexes décrivent les états de résonance de la cavité en présence de pertes et ils forment une base complète,

$$\sum_n |R_n\rangle \langle L_n| = \mathbb{1}_N, \quad (3.11)$$

de vecteurs bi-orthogonaux

$$\langle L_n|R_m\rangle = \delta_{nm}. \quad (3.12)$$

On remarquera que la condition de normalisation des vecteurs propres généralement utilisée pour les vecteurs propres d'un problème hermitien donne ici

$$A_n = \langle R_n|R_n\rangle \geq 1. \quad (3.13)$$

Si l'on suppose que l'ouverture du système ne brise pas l'invariance par renversement du sens du temps (cette hypothèse est généralement vérifiée dans les cavités EM [92] même en présence de pertes),  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}$  sont alors deux opérateurs réels symétriques [102, 103].

Les éléments de la matrice de couplage  $\mathcal{V}$  sont alors réels. La relation (3.7) se réduit à

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}\mathcal{V}^T \quad (3.14)$$

où  $\mathcal{V}^T$  est la matrice transposée de  $\mathcal{V}$ . En injectant (3.14) dans la définition de l'hamiltonien effectif (3.9), on obtient

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H} - \frac{i}{2}\mathcal{V}\mathcal{V}^T, \quad (3.15)$$

l'hamiltonien effectif sous condition d'invariance par renversement du temps. Cette condition ajoute une nouvelle contrainte sur les vecteurs propres, à savoir : les vecteurs propres Gauche et Droite associés à une même valeur propre de (3.15) sont simplement transposés l'un de l'autre :

$$\langle L_n | = | R_n \rangle^T = \langle R_n^* |. \quad (3.16)$$

Ainsi découlant de la bi-orthogonalité (3.12) et de (3.16), les parties réelle et imaginaire d'un même vecteur propre sont orthogonales.

Si  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  représente l'hamiltonien effectif d'une cavité ouverte, les champs propres associés à la  $n$ -ème résonance sont définis par  $\Psi_n^R(\vec{r}) = \langle \vec{r} | R_n \rangle$  et  $\Psi_n^L(\vec{r}) = \langle L_n | \vec{r} \rangle$ . Ces derniers sont solutions de la représentation spatiale de (3.10), c'est-à-dire que  $\Psi_n^R(\vec{r})$  et  $\Psi_n^L(\vec{r})$  sont solutions, dans la cavité, de l'équation d'Helmholtz avec  $k^2 = (2\pi c^{-1}(f_n - i\Gamma_n^f/2))^2$  et vérifient les conditions aux limites imposées par les canaux de fuites (voir Annexe C). L'invariance par renversement du temps, attendue pour une cavité<sup>5</sup>, induit que

---

5. De manière générale, une cavité préserve l'invariance par renversement du temps [59,61]. Cependant, on peut briser cette invariance dans une cavité EM en appliquant un champ magnétique sur une bande de ferrite placée dans la cavité ou sur ses bords [84].

$\Psi_n^R(\vec{r}) = \Psi_n^L(\vec{r}) = \Psi_n(\vec{r})$ . La bi-orthogonalité (3.12) se traduit alors par

$$\begin{cases} \int_V \text{Re}[\Psi_n(\vec{r})] \text{Im}[\Psi_n(\vec{r})] d\vec{r} = 0 & (3.17) \\ \int_V (\text{Re}[\Psi_n(\vec{r})]^2 - \text{Im}[\Psi_n(\vec{r})]^2) d\vec{r} = 1 & (3.18) \\ \int_V (\text{Re}[\Psi_n(\vec{r})]^2 + \text{Im}[\Psi_n(\vec{r})]^2) d\vec{r} = A_n \geq 1 & (3.19) \end{cases}$$

où  $V$  est le volume de la cavité.

### 3.1.2 Réponse d'un système ouvert et hamiltonien effectif

La réponse d'une cavité à une excitation générée par une source (fréquentielle ou temporelle) peut aussi être décrite à l'aide du formalisme de l'hamiltonien effectif. On va se restreindre ici à des sources fréquentielles. De manière générale, connaissant la fonction de Green d'une cavité, la réponse, notée  $\Psi(\vec{r}, f)$ , à une excitation créée par une source quelconque,  $s(\vec{r}, f)$ , oscillant à une fréquence  $f$ , est donnée par [83] :

$$\Psi(\vec{r}, f) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}', f) s(\vec{r}', f) d\vec{r}' \quad (3.20)$$

où  $G(\vec{r}, \vec{r}', f)$  est la fonction de Green de la cavité. Sous forme opératorielle, l'équation (3.20) s'écrit<sup>6</sup> :

$$|\Psi\rangle = \mathcal{G}(E)|s(E)\rangle \quad (3.21)$$

avec  $|\psi\rangle$  et  $|s(E)\rangle$  vérifiant respectivement  $\Psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \Psi \rangle$  et  $s(\vec{r}, f) = \langle \vec{r} | s(E = (2\pi f/c)^2) \rangle$  et  $\mathcal{G}$  l'opérateur de Green de la cavité vérifiant  $G(\vec{r}, \vec{r}', f) = \langle \vec{r} | \mathcal{G}(E = (2\pi f/c)^2) | \vec{r}' \rangle$ . C'est cet opérateur que nous voulons exprimer en fonction de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  lorsque le système est ouvert.

---

6. Après avoir effectué le changement de variable  $E = (2\pi f/c)^2$ .

Pour cela, on écrit la matrice  $S$  en fonction de  $\mathcal{G}$  [103] :

$$S(E) = \mathbb{1}_M - i\mathcal{V}^\dagger \mathcal{G}(E) \mathcal{V}. \quad (3.22)$$

En identifiant termes à termes les équations (3.6) et (3.22), on trouve alors que l'opérateur de Green pour un système ouvert est défini par

$$\mathcal{G}(E) = \frac{1}{E - \mathcal{H}_{\text{eff}}} \quad (3.23)$$

Cette expression correspond simplement à l'extension aux systèmes ouverts, dont l'hamiltonien est  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , de la définition de l'opérateur de Green (la résolvante) d'un système fermé donné au chapitre 1 (voir équation (1.16)). En appliquant la relation de fermeture (3.11) des vecteurs propres de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  sur l'équation (3.23), on exprime facilement  $\mathcal{G}$  en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres Droite et Gauche de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  :

$$\mathcal{G}(E) = \sum_n \frac{|R_n\rangle\langle L_n|}{E - \varepsilon_n} \quad (3.24)$$

La réponse d'une cavité en présence de pertes peut donc être entièrement décrite à partir des vecteurs propres et valeurs propres de son hamiltonien effectif. Faisons quelques remarques sur les équations (3.23) et (3.24) en supposant que  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  est l'hamiltonien d'une cavité à pertes. Tout d'abord l'équation (3.23), lorsqu'on l'exprime en représentation spatiale, montre clairement que la fonction de Green  $G(\vec{r}, \vec{r}', k = 2\pi f/c)$ , correspondant à  $\mathcal{G}(E = k^2)$ , doit être solution à l'intérieur de la cavité de l'équation [17] :

$$(\Delta_{\vec{r}} + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}', k) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.25)$$

et doit vérifier les conditions aux limites imposées par les canaux. Ensuite, l'équation (3.24) donne en représentation spatiale :

$$G(\vec{r}, \vec{r}', k) = \sum_n \frac{\Psi_n(\vec{r}) \Psi_n(\vec{r}')}{k^2 - k_n^2} \quad (3.26)$$

avec

$$k_n = 2\pi c^{-1}(f_n - i\Gamma_n^f/2) \quad (3.27)$$

L'expression (3.26) est la décomposition modale de la fonction de Green de la cavité ouverte. Cette expression est une expression très générale (voir par exemple [17] pp 883-886) et l'absence de conjugaison complexe sur l'un des deux champs propres intervenant dans les numérateurs n'est pas un oubli, elle est dû à la relation (3.16).

### 3.1.3 Pertes homogènes et Pertes inhomogènes : un nombre différent de canaux

J. Barthélémy et al [107] et D.V. Savin et al [108] ont démontré qu'en fonction de leur effet sur les largeurs des résonances, les pertes peuvent être séparées en deux catégories appelées pertes homogènes et pertes inhomogènes. Dans le formalisme de l'hamiltonien effectif, ces deux catégories de pertes ne sont pas modélisées de la même façon.

La première catégorie correspond à des pertes uniformément réparties dans le système. Celles-ci contribuent de manière uniforme aux largeurs. C'est-à-dire que dans une gamme finie de fréquences, les résonances possèdent toutes la même largeur  $\Gamma_n = \Gamma$ <sup>7</sup>. Ainsi, par rapport au cas fermé ( $\Gamma_n = 0$ ), les résonances sont seulement translatées dans le plan complexe de manière identique. Un exemple de pertes homogènes correspond aux pertes ohmiques induites par les plaques haute et basse qui ferment une cavité micro-ondes

---

7. On va à présent utiliser la notation  $\Gamma_n$  pour désigner la largeur des résonances de manière générale. Cela signifie que  $\Gamma_n$  désigne indifféremment  $\Gamma_n^\varepsilon$  ou  $\Gamma_n^f$ . De même on utilisera l'expression "centre de la résonance" pour désigner soit la partie réelle de  $\varepsilon_n$  (3.8) soit la partie réel de  $k_n$  (3.27) soit  $f_n$

quasi-bidimensionnelle [107].<sup>8</sup> Du point de vue des champs propres, un système qui ne présente que des pertes homogènes peut encore être représenté par des champs propres réels. Ils sont spatialement identiques à ceux de la cavité fermée [108]. Dans le formalisme de l'hamiltonien effectif, les pertes homogènes peuvent être modélisées par un nombre de canaux de fuites identiquement couplés tendant vers l'infini tandis que le couplage de chaque canal tend vers zéro.

Les pertes inhomogènes sont, quant à elles, liées à des pertes spatialement localisées à l'intérieur ou sur les bords de la cavité [107]. En contribuant de manière différente pour chaque résonance, elles induisent des fluctuations dans les valeurs prises par les différentes largeurs. On peut donner comme exemples les pertes liées aux couplages avec les antennes ou encore celles entraînées par la conductivité finie des bords latéraux d'une cavité micro-ondes quasi-bidimensionnelle [107, 122]. Du point de vue spatial, les pertes inhomogènes sont responsables de la complexification des champs propres, c'est-à-dire de l'existence de densité de courant dans la cavité [114]. À la différence des pertes homogènes, les pertes inhomogènes sont décrites dans le formalisme de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  par un nombre  $M$  fini de canaux de fuites, avec  $M \ll N$ ,  $N$  étant le nombre de résonances dans la cavité [108]. Par exemple pour une antenne ponctuelle ou un guide d'onde monomode, les pertes sont associées à 1 canal de fuite. Pour un guide d'onde multimode, chacun des modes transverses du guide d'onde à la longueur d'onde du champ dans la cavité est compté comme un canal de fuite. Pour des processus d'absorption (comme la dissipation ohmique), on ne peut qu'estimer l'ordre de grandeur du nombre de canaux fictifs (voir Annexe D et [108]). Par exemple pour une absorption due à des pertes ohmiques sur une surface  $S$  dans une cavité EM 3D, le nombre de canaux vu par un champ de longueur d'onde  $\lambda$  est donné (dans la limites

---

8. Dans le cas des pertes ohmiques, on observe aussi un décalage des centres des résonances par rapport à ceux attendus dans un système fermés. Ce décalage est égal à la demi largeur de la résonance. Ainsi les pertes ohmiques homogènes translatent simplement le spectre globalement.

$\lambda \ll \sqrt{S}$ ) par l'approximation (D.6)<sup>9</sup>

$$M \simeq \frac{2\pi S}{\lambda^2} \quad (3.28)$$

Dans un système comme une cavité EM, les mécanismes de pertes sont multiples et chacun d'eux participe à la largeur des résonances. Ainsi pour une résonance donnée, sa largeur totale peut être décomposée en une somme de largeurs partielles :

$$\Gamma_n = \Gamma_n^{\text{hom}} + \Gamma_n^{\text{inh}} \quad (3.29)$$

où  $\Gamma_n^{\text{hom}}$  et  $\Gamma_n^{\text{inh}}$  sont respectivement la somme des largeurs partielles dues aux différentes pertes homogènes et la somme de celles dues aux différentes pertes inhomogènes [107, 108, 117]. Les poids relatifs de  $\Gamma_n^{\text{hom}}$  et  $\Gamma_n^{\text{inh}}$  dépendent fortement du système étudié et, dans un même système, de la longueur d'onde.

### 3.1.4 Sensibilité des champs propres aux pertes : *phase rigidity* et paramètre de complexité

Pour quantifier la complexité d'un champ scalaire  $\Psi(\vec{r})$ <sup>10</sup>, une quantité communément employée est la *rigidité de phase* ou *phase rigidity* [105, 123, 124]<sup>11</sup>, notée  $\rho$  et définie par :

$$\rho = \frac{\int_V \Psi^2(\vec{r}) d\vec{r}}{\int_V |\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r}}. \quad (3.30)$$

Dans un système ouvert et invariant par renversement du temps, comme une cavité EM, la complexité est introduite par les pertes (inhomogènes) et  $\rho$  ou plutôt  $|\rho|$  fournit une

9. Dans l'équation (D.6) de l'annexe D,  $\bar{q}(f)$  est ici remplacé par le terme dominant de la loi de Weyl (1.4) :  $(8\pi V)f^2/(c^3)$

10. On désigne par complexité du champ le poids relatif entre les ondes stationnaires et les ondes progressives qui le constituent

11. L'expression française étant peu courante on lui préférera sa version anglaise de *phase rigidity*



mesure indirecte des courants moyens dans la cavité [113, 114, 121]. En effet, la définition de la *phase rigidity* (3.30) implique que

$$0 \leq |\rho| \leq 1 \quad (3.31)$$

et son module est relié à la valeur moyenne de la densité de courant par [113]

$$\langle J^2(\vec{r}) \rangle_{\vec{r}} = \frac{c^2 \langle |\Psi|^2 \rangle_{\vec{r}}^2}{2} [1 - |\rho|^2] \quad (3.32)$$

où  $J(\vec{r}) = \|\vec{J}(\vec{r})\|$  est la norme de la densité de courant locale<sup>12</sup> définie par

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{ic}{2k} \left( \Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi \right) \quad (3.33)$$

et  $\langle \dots \rangle_{\vec{r}}$  désigne la moyenne spatiale. Ainsi pour  $|\rho| = 1$ , le champ n'a dans l'ensemble du système qu'une phase unique, de sorte que par une rotation triviale, il peut être ramené à un champ réel. Ceci a pour conséquence un courant moyen nul<sup>13</sup> dans le système (associé à une absence d'ondes progressives) et un champ spatialement équivalent à celui d'un système fermé. À l'opposé si  $|\rho| = 0$ , parties réelle et imaginaire de  $\Psi(\vec{r})$  ont dans l'ensemble du système un poids équivalent. C'est-à-dire que la phase de  $\Psi(\vec{r})$  est uniformément distribuée. Le courant moyen dans le système est alors maximal et le système est dit complètement ouvert [113]. Lorsque l'on mesure la *phase rigidity* sur les vecteurs propres (ou les champs propres) de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  associé à un système invariant par renversement du temps, on a

$$\rho_n = \frac{\int_V \Psi_n^2(\vec{r}) d\vec{r}}{\int_V |\Psi_n(\vec{r})|^2 d\vec{r}} = \frac{\langle L_n | R_n \rangle}{\langle R_n | R_n \rangle}. \quad (3.34)$$

12. Dans une cavité EM quasi-bidimensionnelle, où le champ EM peut être décrit par un champ scalaire [61],  $\vec{J}$  n'est rien d'autre que le vecteur de Poynting

13. On désigne par courant moyen la quantité :  $\sqrt{\langle J^2(\vec{r}) \rangle_{\vec{r}}}$

Outre la mesure de la sensibilité de chaque vecteur propre aux pertes,  $\rho_n$  est aussi une mesure de leur bi-orthogonalité [105]. L'invariance par renversement du temps et la bi-orthogonalité imposant les relations (3.17) et (3.18), le numérateur de (3.34) s'écrit donc  $\int_V \Psi_n^2(\vec{r}) d\vec{r} = \int_V (\text{Re}[\Psi_n(\vec{r})]^2 - \text{Im}[\Psi_n(\vec{r})]^2) d\vec{r} = 1$  et

$$|\rho_n| = \rho_n = \frac{1}{A_n} \quad (3.35)$$

où  $A_n$  est défini dans l'équation (3.19)<sup>14</sup>.

Une autre quantité, appelée paramètre de complexité<sup>15</sup> (ou de non-orthogonalité) et notée  $q_n^2$ , est aussi couramment utilisée pour caractériser la complexité des champs propres des systèmes ouverts invariants par renversement du temps [108, 122, 125–127]. Ce paramètre est une quantité assez naturelle pour mesurer la complexité d'une fonction d'onde, puisqu'il est défini comme le rapport entre les variances des partie imaginaire et réelle du champ,

$$q_n^2 = \frac{\langle \text{Im}[\Psi_n]^2 \rangle_{\vec{r}}}{\langle \text{Re}[\Psi_n]^2 \rangle_{\vec{r}}} \quad (3.36)$$

La paramètre de complexité de la  $n$ -ème résonance est lié à sa *phase rigidity* par la relation [92]

$$q_n^2 = \frac{1 - |\rho_n|}{1 + |\rho_n|} \quad (3.37)$$

Le paramètre de complexité est donc compris entre 0 (système fermé) et 1 (système complètement ouvert). On remarquera que le paramètre de complexité peut aussi être utilisé pour caractériser le ratio entre ondes progressives et ondes stationnaires dans le champ associé à la réponse d'un système ouvert à une excitation donnée (équation (3.20)). Comme ce champ n'est plus la représentation spatiale d'un vecteur propre d'un hamiltonien effectif, il est nécessaire, si l'on souhaite calculer  $q^2$  à partir de sa définition (3.36), de rendre

---

14. ou (3.13)

15. Le paramètre de complexité a originellement été introduit par O. Lobkis et R. Weaver dans un contexte d'ondes élastodynamiques [125]

les parties réelle et imaginaire du champ orthogonales entre elles [92, 121]. Il suffit de normaliser le champ par  $\sqrt{\int_V \Psi^2 d\vec{r}}$  [100], cette normalisation supprimant la phase globale du champ. Cette précaution n'est cependant pas nécessaire si, après avoir calculé  $\rho$  (équation 3.30), on utilise la relation (3.37) pour estimer  $q^2$ .

## 3.2 $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ et TMA : des statistiques universelles pour les cavités chaotiques présentant des pertes

Une des raisons du succès de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  dans la communauté du chaos ondulatoire provient du fait qu'associé à la TMA [92, 103–106, 108, 109, 111], il permet de modéliser les systèmes chaotiques ouverts à partir d'un nombre réduit de paramètres (le nombre de canaux de fuite et la force de leur couplage) et ainsi de prédire leurs comportements statistiques universels. Ces prédictions portent aussi bien sur des quantités spectrales comme la NNSD [118], les croisements évités [120], les distributions des largeurs [116, 117], que spatiales comme, par exemple, la distribution du paramètre de complexité [127]. La dépendance explicite de la matrice  $S$  en fonction de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  permet également d'utiliser la TMA afin de prédire le comportement statistique de  $S$  [128, 129] et de ses quantités dérivées [109]. Étrangement, aucun article ne semble s'être intéressé directement à la distribution des éléments des vecteurs propres ou à celle de la réponse (équation (3.24)), lorsque  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  est remplacé par des matrices aléatoires.

Après avoir rappelé comment modéliser un système chaotique ouvert invariant par renversement du temps grâce à la TMA appliquée à  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , nous montrerons que ce modèle permet de prédire, quel que soit le régime, le comportement statistique aussi bien des champs propres que de la réponse complexe d'une cavité chaotique ouverte. Les distributions d'intensité des champs sont en accord avec le modèle de R. Pnini et B. Shapiro qui consiste à supposer que dans une cavité chaotique présentant des pertes, le champ se décompose en une partie stationnaire et une partie progressive, toutes deux pouvant être

représentées par une somme aléatoire d'onde planes [113]

### 3.2.1 Modéliser les cavités chaotiques présentant des pertes par des matrices aléatoires

Supposons que  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H} - i\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger/2$ , représente l'hamiltonien d'une cavité chaotique ouverte possédant  $N$  résonances couplées à leur environnement par  $M$  canaux de fuites. Si aucun élément, comme de la ferrite dans une cavité EM, n'est introduit dans la cavité afin de briser la symétrie par renversement du temps, l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  du système fermé peut naturellement être modélisé par une matrice hermitienne aléatoire  $H$ , de taille  $N \times N$ , appartenant à l'ensemble GOE. La matrice de couplage,  $\mathcal{V}$ , peut aussi être modélisée par une matrice aléatoire  $V$  de taille  $N \times M$ , dont chaque élément  $V_n^j$  est une variable aléatoire représentant le couplage du  $n$ -ème état propre de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  ( $n = 1, \dots, N$ ) au  $j$ -ème canal ( $j = 1, \dots, M$ ). L'opérateur non-hermitien  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  est donc remplacé par un ensemble de matrices aléatoires non-hermitiennes de rang  $N$ , notées  $H_{\text{eff}}$ , et vérifiant

$$H_{\text{eff}} = H - iVV^\dagger/2. \quad (3.38)$$

Comme  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  modélise un système invariant par renversement du temps,  $H_{\text{eff}}$  doit être invariant par transformation orthogonale [106]. Afin de préserver cette invariance, les éléments  $V_n^j$  de la matrice de couplage sont des variables aléatoires réelles, indépendantes et distribuées selon une loi normale centrée, d'écart type  $\sigma_j$  [108, 127]. En conséquence de l'ergodicité des états propres de  $H$ , l'écart type  $\sigma_j$  ne dépend que du numéro du canal. Il peut également être relié à la force de couplage  $\kappa_j$  de ce canal par  $\sigma_j^2 = 2\kappa_j\Delta/\pi$  où  $\Delta$  est l'espacement moyen entre les centres des résonances. La force de couplage est elle-même

liée au coefficient de transmission moyen  $\langle T_j \rangle$  du  $j$ -ème canal par [92, 106, 127] :

$$\langle T_j \rangle = \frac{4\kappa_j}{(1 + \kappa_j)^2}. \quad (3.39)$$

Dans la suite de ce manuscrit, on va supposer, sauf mention contraire, que les canaux sont tous identiquement couplés à la cavité<sup>16</sup>. En conséquence on a :

$$\langle V_n^j V_p^k \rangle = \sigma^2 \delta^{jk} \delta_{np} = (2\kappa\Delta/\pi) \delta^{jk} \delta_{np}. \quad (3.40)$$

L'étude des valeurs propres et vecteurs propres des matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$  ainsi définis permet de prédire le comportement universel des systèmes ondulatoires chaotiques en présence de pertes. Nous allons dans les paragraphes suivants établir et rappeler un certain nombre de prédictions obtenues grâce aux matrices aléatoires. Ces résultats ont pour la plupart été vérifiés dans des cavités micro-ondes quasi-bidimensionnelles [92]. Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux statistiques spatiales des cavités chaotiques ouvertes puisque ces dernières sont au cœur de notre travail visant à rendre chaotique les chambres réverbérantes afin de maîtriser et d'améliorer leur comportement près de la LUF.

### 3.2.2 Distribution spatiale de l'intensité des champs propres

#### Quelques remarques préliminaires

Avant de présenter les propriétés spatiales des cavités chaotiques qui sont les plus pertinentes dans le cadre de notre travail sur les CR, il est important de noter que, comme dans le cas des cavités fermées et des matrices GOE, les prédictions théoriques sont obtenues en faisant tendre le rang de  $H_{\text{eff}}$  vers l'infini. Pour modéliser les propriétés spatiales d'une

---

16. Cette hypothèse est couramment faite pour simplifier les calculs [111, 122, 127]. Elle sera cependant justifiée lorsque l'on comparera les résultats obtenus dans notre modèle numérique de CR chaotiques ouvertes avec des simulations de matrices aléatoires (voir chapitre 4).

cavité chaotique ouverte avec des matrices aléatoires non-hermitiennes de rang  $N$  fini, il ne faut considérer que les vecteurs propres associés à des valeurs propres  $\varepsilon_n = \tilde{\varepsilon}_n - i\Gamma_n/2$  dont les parties réelles sont au centre de la loi semi-circulaire (1.23)<sup>17</sup> ( $\varepsilon_n \sim 0$ ). Pour l'ensemble des simulations de matrice aléatoire  $H_{\text{eff}}$ , lorsque l'on présentera les résultats, ceux-ci seront obtenus à partir des vecteurs propres associés à des valeurs propres dont la partie réelle vérifie :  $|\tilde{\varepsilon}_n| < 0.05$ . Dans cette région la densité de niveaux est maximale et pratiquement constante. Ceci permet, en fixant le couplage  $\kappa$  et en prenant  $\Delta = \langle \varrho(0) \rangle^{-1}$  (équation (1.23)), de définir la variance des éléments de la matrice de couplage à partir de l'équation (3.40). En fixant  $\Delta$  et  $\kappa$ , on fixe une autre quantité importante dans la suite de nos études, à savoir le recouvrement modal moyen  $d$ , défini dans le chapitre 1 par l'équation (1.3), équation que l'on rappelle ici :

$$d = \frac{\langle \Gamma_n \rangle}{\Delta} \quad (3.41)$$

En effet la relation de Moldauer-Simonius lie entre eux le coefficient de transmission moyen des canaux  $\langle T \rangle$ , lui-même lié à  $\kappa$  par (3.39), leur nombre  $M$ , la largeur moyenne des résonances  $\langle \Gamma_n \rangle$  et l'espacement moyen entre résonances  $\Delta$  [130] :

$$d = \frac{\langle \Gamma_n \rangle}{\Delta} = -\frac{M}{2\pi} \ln(1 - \langle T \rangle). \quad (3.42)$$

---

17. Bien que la distribution jointe,  $P(\{\varepsilon_n\})$ , des valeurs propres complexes de  $H_{\text{eff}}$  soit différente de celle d'une matrice purement GOE (1.21) [118], la densité d'états moyenne  $\langle \varrho(\varepsilon) \rangle$ , évaluée à partir des parties réelles des résonances, continue à suivre de manière assez fidèle la loi semi-circulaire de Wigner [102]. Il en va de même pour les cavités présentant des pertes ; malgré celles-ci les centres des résonances ont une densité d'état moyenne,  $\bar{\rho}(f)$ , qui continue de suivre la loi de Weyl (termes dominant) adaptée aux dimensions du problème (1.4)

### Champs propres d'une cavité chaotique et composantes des vecteurs propres de $H_{\text{eff}}$ : des statistiques identiques

Notons  $\Psi_{n,i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ), les  $N$  composantes des vecteurs propres Droite,  $\Psi_n$ <sup>18</sup>, des matrices aléatoires non-hermitiennes  $H_{\text{eff}}$  (3.38). Les statistiques des  $\Psi_{n,i}$  permettent de décrire les statistiques spatiales des champs propres,  $\Psi_n(\vec{r}) = \langle \vec{r} | R_n \rangle$ , à l'intérieur des cavités chaotiques ouvertes. La bi-orthogonalité et l'invariance par renversement du temps, impliquent que chaque vecteur propre  $\Psi_n$  vérifie :

$$\sum_{i=1}^N \text{Re} [\Psi_{n,i}] \text{Im} [\Psi_{n,i}] = 0 \quad (3.43)$$

$$\sum_{i=1}^N (\text{Re} [\Psi_{n,i}]^2 - \text{Im} [\Psi_{n,i}]^2) = 1 \quad (3.44)$$

$$\sum_{i=1}^N (\text{Re} [\Psi_{n,i}]^2 + \text{Im} [\Psi_{n,i}]^2) = A_n \geq 1 \quad (3.45)$$

De même, pour les vecteurs propres de  $H_{\text{eff}}$ , la *phase rigidity* (3.30) et le paramètre de complexité (3.36) sont définis par :

$$\rho_n = \frac{\sum_{i=1}^N \Psi_{n,i}^2}{\sum_{i=1}^N |\Psi_{n,i}|^2} \quad (3.46)$$

$$q_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \text{Im} [\Psi_{n,i}]^2}{\sum_{i=1}^N \text{Re} [\Psi_{n,i}]^2}, \quad (3.47)$$

$q_n^2$  et  $\rho_n$  sont toujours liés l'un à autre par l'équation (3.37)  $q_n^2 = [1 - |\rho_n|]/[1 + |\rho_n|]$ .

---

18. Les  $\Psi_n$  sont des vecteurs colonnes. Les vecteurs Gauche associés sont les vecteurs lignes  $\Psi_n^T$

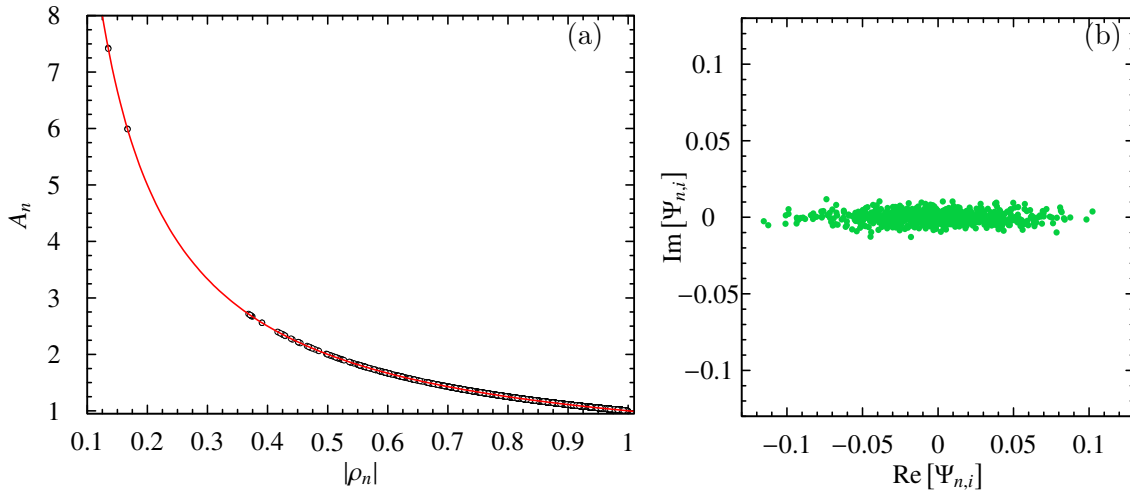


FIGURE 3.1 – **Illustration de la bi-orthogonalité des vecteurs propres.** (a) Comparaison entre  $A_n = f(\rho_n)$  (cercles noirs) et l'hyperbole d'équation  $y = 1/x$  (courbe rouge). (b) Distribution dans le plan complexe des composantes  $\Psi_{n,i}$  d'un vecteur propre d'une matrice  $H_{\text{eff}}$   $700 \times 700$

Dans la Figure 3.1, nous illustrons la bi-orthogonalité des vecteurs propres de  $H_{\text{eff}}$  (et donc des champs propres des cavités chaotiques) au travers de deux de ses conséquences. La première est dérivée en combinant les equations (3.44) et (3.45) avec la définition de  $\rho_n$  (3.46). On obtient alors que :

$$A_n = N \langle |\Psi_{n,i}| \rangle_i = \frac{1}{\rho_n} \quad (3.48)$$

où  $\langle \cdots \rangle_i$  est la valeur moyenne sur les  $N$  composantes du vecteur  $\Psi_n$ <sup>19</sup>. Cette relation est parfaitement vérifiée dans la Figure 3.1a où l'on compare la courbe  $A_n = f(\rho_n)$  (cercle noire) avec l'hyperbole d'équation  $y = 1/x$  (courbe rouge). Les données  $A_n$  et  $\rho_n$  sont calculées à partir des vecteurs propres de 370 matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$ , de dimension  $700 \times 700$  et avec  $\kappa = 0.05$  et  $M = 10$ . Seuls les vecteurs associés à des valeurs propres au centre de la loi semi-circulaire sont conservés. La Figure 3.1b illustre, avec un vecteur propre d'une matrice aléatoire  $H_{\text{eff}}$ , l'orthogonalité des parties réelles et imaginaires d'un même vecteur

19. On obtient la même relation pour les champs propres  $\Psi_n(\vec{r})$  en remplaçant  $\langle \cdots \rangle_i$  par la moyenne spatiale  $\langle \cdots \rangle_{\vec{r}}$  et  $N$  par le volume  $V$  de la cavité.



propre de l'hamiltonien effectif d'une cavité chaotique, cette orthogonalité étant traduite par l'équation (3.43) (ou (3.17)). D'après le modèle de Pnini et Shapiro, la fonction d'onde dans un système chaotique ouvert est statistiquement équivalent à une variable aléatoire complexe dont parties réelle et imaginaire sont deux variables aléatoires gaussiennes, de valeurs moyennes nulles mais de variances potentiellement différentes. Lorsque ces hypothèses s'appliquent aux champs propres d'une cavité, donc aussi aux  $\Psi_{n,i}$ , la relation (3.43) traduit alors l'indépendance statistique de  $\text{Re}[\Psi_{n,i}]$  et  $\text{Im}[\Psi_{n,i}]$ . En résumé, on peut représenter  $\text{Re}[\Psi_{n,i}]$  et  $\text{Im}[\Psi_{n,i}]$  par deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon deux lois normales centrées dont le rapport des variances est fixé par le paramètre de complexité  $q_n^2$  du mode. La conséquence directe des hypothèses statistiques susmentionnées est que la distribution de l'intensité normalisée  $\tilde{I}_n = |\Psi_n|^2 / \langle |\Psi_n|^2 \rangle$ <sup>20</sup> des états propres complexes s'écrit [113, 114]<sup>21</sup> :

$$P(\tilde{I}_n; \rho_n) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\rho_n|^2}} \exp \left[ -\frac{\tilde{I}_n}{1 - |\rho_n|^2} \right] I_0 \left[ \frac{|\rho_n| \tilde{I}_n}{1 - |\rho_n|^2} \right]. \quad (3.49)$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée du premier ordre. Cette distribution permet une interpolation continue entre la distribution de Porter-Thomas ( $|\rho| = 1$ ) d'un système fermé et la loi exponentielle ( $\rho = 0$ ) attendue dans un système complètement ouvert (correspondant au régime d'Ericson en physique nucléaire, au régime de Schroeder en acoustique des salles ou aux hypothèses de Hill sur les composantes cartésiennes du champ électrique dans une CR), et ne dépend que de la *phase rigidity* donc de la densité moyenne de courant dans la cavité (équation (3.32)). Puisqu'il a été démontré que  $q_n^2$  (et par extension  $\rho_n$ ) est une quantité distribuée [111, 122, 127], la distribution des intensités

20. Ici  $\langle \dots \rangle = \langle \dots \rangle_i$  ou  $\langle \dots \rangle_{\vec{r}}$ , selon que l'on associe  $\Psi_n$  aux  $\Psi_{n,i}$  ou à  $\Psi_n(\vec{r})$

21. La distribution (3.49) a été proposée pour la première fois par Zyczkowski et Lenz [131] pour caractériser la distribution des états propres d'un système chaotique fermé dont l'hamiltonien subit une brisure partielle de symétrie par renversement du temps. De tels systèmes sont décrits par un hamiltonien aléatoire hermitien subissant une transition paramétrique entre une description GOE et GUE. Ils possèdent des valeurs propres réelles associées à des vecteurs propres complexes, dont la complexité peut être caractérisée par  $\rho$  [123].

normalisées d'un ensemble de vecteurs propres de  $H_{\text{eff}}$  est donnée par :

$$P(\tilde{I}) = \int_0^1 p_\rho(\rho) P(\tilde{I}; \rho) d\rho. \quad (3.50)$$

où  $p_\rho$  est la distribution suivie par l'ensemble des  $|\rho_n|$  associés à l'ensemble des  $\Psi_n$ .

Dans les sections qui vont suivre, nous allons montrer que la distribution (3.50) peut être utilisée quel que soit le régime de couplage de la cavité. Nous montrerons entre autres que, dans le régime de faible couplage, où la distribution des  $\rho_n$  est connue,  $P(\tilde{I})$  est entièrement décrite par deux paramètres : le recouvrement modal moyen  $d$  et le nombre de canaux de fuite  $M$ .

### 3.2.3 Le régime de couplage faible

Le régime de couplage faible correspond à la limite  $\kappa \ll 1$ . La partie antihermitienne de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  peut alors être traitée comme une perturbation de l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  du système fermé. En supposant un régime de couplage faible, on a également

$$\sqrt{\text{Var}(\Gamma_n)}/\Delta \ll 1 \quad (3.51)$$

et très souvent un recouvrement modal faible ou modéré ( $d \lesssim 1$ ). En utilisant la théorie des perturbations, C. Poli et al. ont dérivé la distribution du paramètre de complexité  $q_n^2$  des états propres des systèmes ondulatoires chaotiques ouverts [111, 127]. Les calculs étant assez complexes<sup>22</sup>, on ne reportera ici que leur résultat principal (GOE) :

$$p_{x;M}(x_n) = \frac{\pi^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4M^2 x_n}\right)^{-2 - \frac{M}{2}} \left(1 + \frac{(3+M)\pi^2}{4M^2 x_n}\right)}{24Mx_n^2} \quad (3.52)$$

---

22. Le lecteur intéressé par les détails du calcul pourra se référer au chapitre 3 de la thèse de C. Poli [111].

avec  $x_n = q_n^2/d^2$  et  $M$  le nombre de canaux de fuite. La distribution de la *phase rigidity* peut être directement déduite des égalités

$$p_\rho(\rho)d\rho = p_{x;M}(x)dx \text{ et } x = \frac{(1 - |\rho|)}{d^2(1 + |\rho|)}. \quad (3.53)$$

et ne dépend que du recouvrement modal moyen  $d$  et de  $M$  :

$$p_{\rho;\{M,d\}}(|\rho|) = \frac{2}{d^2(1 + |\rho|)^2} p_{x;M}\left(\frac{(1 - |\rho|)}{d^2(1 + |\rho|)}\right). \quad (3.54)$$

Ainsi, en couplage faible, connaissant le nombre de canaux de fuite et le recouvrement modal, on peut prédire analytiquement la distribution de la *phase rigidity* (3.54) et la distribution spatiale de l'intensité normalisée  $\tilde{I}$  d'un ensemble de champs propres (3.50) d'une cavité chaotique présentant des pertes. Nous allons tester ces deux distributions avec des simulations de matrices aléatoires. Pour cela on diagonalise 376 hamiltoniens effectifs aléatoires de dimension  $700 \times 700$ . On fixe  $M = 10$  et  $\kappa = 0.0581 \ll 1$ . Pour la partie hermitienne  $H$  des  $H_{\text{eff}}$ , on choisit des matrices GOE dont la variance des éléments non-diagonaux est  $\varsigma^2 = 2/(\pi^2 N)$ . Cela impose que la distance moyenne entre résonances au centre de la loi semi-circulaire vaut  $\Delta = N/\sqrt{2}$  (voir le chapitre 1). Le recouvrement modal moyen calculé à partir de sa définition (rappelée dans l'équation (3.41)) donne  $d = 0.371$ . On vérifie également la condition (3.51) :  $\sqrt{\text{Var}(\Gamma_n)}/\Delta = 0.17$ . Dans la Figure 3.2, la distribution empirique<sup>23</sup> des  $\rho_n$  (histogramme en bleu), notée  $p_{\rho;e}$  et calculée à partir des vecteurs propres associés aux valeurs propres au centre de la loi semi-circulaire, est comparée avec la prédiction  $p_{\rho;\{M,d\}}$  où  $M = 10$  et  $d = 0.371$  (courbe rouge). L'accord est excellent.

---

23. On utilisera la dénomination *empirique* pour désigner les distributions obtenues à partir de données numériques ou expérimentales.

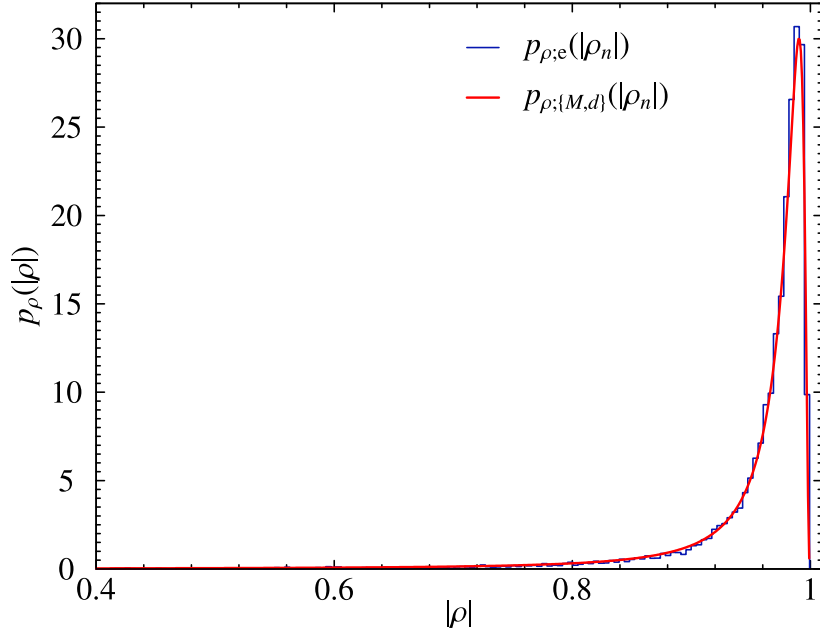


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la distribution de la *phase rigidity* des vecteurs propres de  $H_{\text{eff}}$  ( $p_{\rho;\text{e}}$ ) et la prédiction de la TMA en régime de couplage faible ( $p_{\rho;\{M,d\}}$ ).

Le graphique principal de la Figure 3.3 compare la distribution de l'intensité normalisée  $\tilde{I}_n$  (histogramme en noir), associée à l'ensemble des vecteurs propres utilisés pour tracer la Figure 3.2, avec la prédiction (3.50) (courbe en bleu) dans laquelle  $p_\rho$  a été remplacée par la distribution empirique  $p_{\rho;\text{e}}$ . Cette distribution est notée  $P^e(\tilde{I})$  et est calculée de la manière suivante :

$$P^e(\tilde{I}) = \sum_{j=1}^{n_b} \mathbf{p}_j P(\tilde{I}, \rho_j) \Delta \rho_j, \quad (3.55)$$

avec  $\mathbf{p}_j$  la hauteur du bin centré sur la valeur  $\rho_j$  dans l'histogramme  $p_{\rho;\text{e}}$ ,  $n_b$  le nombre de bin dans  $p_{\rho;\text{e}}$  et  $\Delta \rho_j = \rho_{j+1} - \rho_j \equiv \Delta \rho$  la largeur unique des bin de  $p_{\rho;\text{e}}$ . L'accord entre l'histogramme et  $P^e(\tilde{I})$  est parfait sur près de 6 décades. En insert de la Figure 3.3, sont tracés l'écart relatif entre  $P^e(\tilde{I})$  et  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I})$  (ligne continue rouge) et  $P^e(\tilde{I})$  et  $P^{\text{PT}}(\tilde{I})$  (courbe en tirets violets).  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I})$  et  $P^{\text{PT}}(\tilde{I})$  désignent respectivement la distribution (3.50) dans laquelle  $p_\rho$  a été remplacée par la distribution  $p_{\rho;\{M,d\}}$  avec  $M=10$  et  $d=0.37$  et la distribution de Porter-Thomas attendue dans un système fermé ou ne présentant

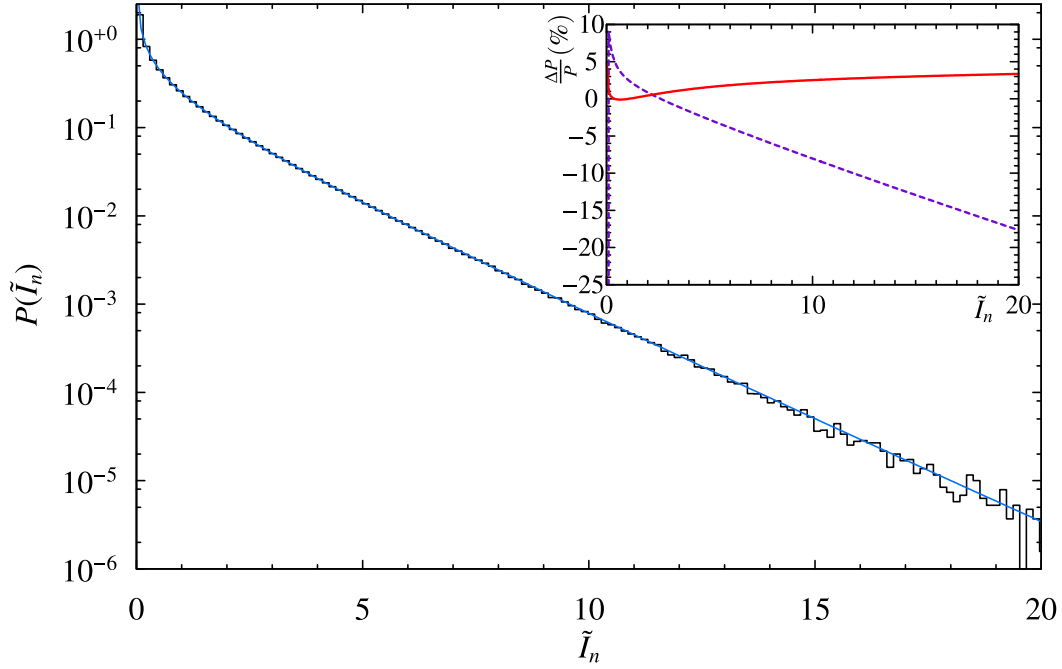


FIGURE 3.3 – Distribution d'intensité normalisée d'un ensemble de vecteurs propres en régime de couplage faible

que des pertes homogènes. L'écart relatif entre  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I})$  et  $P^e(\tilde{I})$  ne dépasse pas 5% au maximum, ce qui signifie que la distribution analytique  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I})$  est elle aussi en très bon accord avec l'histogramme. La distribution  $p_{\rho;\{M,d\}}$  peut donc, en couplage faible, être utilisée dans (3.50) pour prédire le comportement statistique de  $\tilde{I}$ . L'écart relatif entre  $P^{\text{PT}}(\tilde{I})$  et  $P^e(\tilde{I})$  est quant à lui beaucoup plus important. Il commence à près de 15% pour les valeurs les plus probables et finit à près de 20% sur la queue des distributions. Ainsi, bien que les valeurs les plus probables prises par les  $\rho_n$  restent proches de 1, la distribution des  $\tilde{I}_n$  est significativement différente de celle attendue dans un système sans pertes. Ces résultats font apparaître clairement l'importance de  $d$  et  $M$  en régime de couplage faible. Que ce soit expérimentalement ou numériquement,  $d$  est facilement calculable à partir du spectre de la cavité. Pour ce qui est du nombre de canaux, son évaluation peut se révéler a priori plus difficile. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, le nombre de canaux est aussi fortement corrélé aux fluctuations des largeurs. Dans le régime de

faible couplage, la partie antihermitienne  $-iVV^\dagger/2$  de  $H_{\text{eff}}$  est considérée comme une perturbation de l'hamiltonien  $H$  du système fermé. Notons  $\{E_n\}$  et  $\{|n\rangle\}$  les valeurs propres et vecteurs propres de  $H$ . En appliquant le théorie de la perturbation, le centre de la  $n$ -ème résonance donné par la partie réelle de la  $n$ -ème valeur propre,  $\varepsilon_n = \tilde{\varepsilon}_n - i/2\Gamma_n$ , de  $H_{\text{eff}}$  correspond à la  $n$ -ème valeur propre de  $H$  et la largeur  $\Gamma_n$  de cette résonance est donnée par :

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \langle n|VV^\dagger|n\rangle \\ &= \sum_{j=1}^M V_n^{j2}\end{aligned}\tag{3.56}$$

Ainsi  $\Gamma_n$  est la somme de  $M$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la même loi gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$  (équation (3.40)). Ceci implique donc que

$$\langle \Gamma_n \rangle = \sigma^2 M \tag{3.57}$$

$$\text{Var}(\Gamma_n) = 2\sigma^4 M \tag{3.58}$$

et que les largeurs réduites  $\gamma_n = \Gamma_n/\sigma^2$  sont distribuées selon une loi  $\chi^2$  à  $M$  degrés de liberté [122, 127]. La Figure 3.4 illustre ce résultat en comparant la distribution des largeurs renormalisées  $^{24}P_\gamma(\gamma_n)$  (histogramme bleu), associée aux résultats présentés dans les figures précédentes, à la loi  $\chi_M^2$  avec  $M = 10$  (ligne continue rouge). L'accord entre les deux distributions est excellent. À partir des équations (3.57) et (3.58), on montre que les 2 premiers moments de  $\Gamma_n$  sont également liés au nombre de canaux par la formule :

$$\frac{M}{2} = \frac{\overline{\Gamma}_n^2}{\text{Var}(\Gamma_n)} \tag{3.59}$$

Lorsque l'on applique cette formule à notre échantillon, on trouve  $2\overline{\Gamma}_n^2/\text{Var}(\Gamma_n) = 9.6 \simeq 10$ . L'excellent accord entre les deux distributions confirme que pour les paramètres choisis

---

24. On utilise  $\sigma^2 = 2\kappa\Delta/\pi$  (équation (3.40))

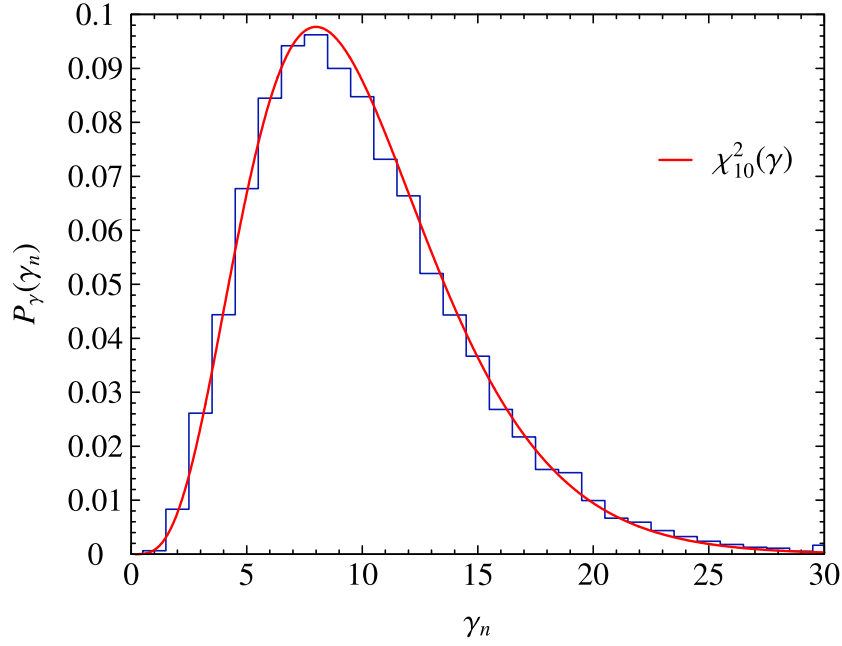


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la distribution des largeurs des résonances renormalisés et les prédictions de la TMA en régime de couplage faible.

dans les simulations de matrices aléatoires, à savoir  $\kappa = 0.058$  et  $M = 10$ ,  $H_{\text{eff}}$  est bien dans un régime de couplage faible. On confirme ici qu'en couplage faible, les deux paramètres essentiels pour décrire un système ondulatoire chaotique ouvert, sont le recouvrement modal moyen  $d$  et le nombre de canaux de fuite  $M$ . En effet, en combinant les expressions (3.57) et (3.40), on peut exprimer la force de couplage  $\kappa$  uniquement en fonction de ces deux paramètres :

$$\kappa = \frac{\pi \bar{\Gamma}_n}{2\Delta M} = \frac{\pi d}{2M} \quad (3.60)$$

Si on injecte dans cette équation la valeur calculée du recouvrement modal,  $d = 0.371$  et  $M = 10$ , on retrouve effectivement la valeur de  $\kappa$  fixée dans les simulations de matrices aléatoires. La formule (3.60) est également en accord avec la formule de Moldauer-Simonius (3.42), en prenant la limite  $\kappa \ll 1$ <sup>25</sup>. De même, on constatera qu'en utilisant l'équation (3.59), il est possible de redéfinir la condition de couplage faible (3.51) unique-

25. Dans la limite  $\kappa \ll 1$ , le coefficient de transmission moyen  $\langle T \rangle \simeq 4\kappa \ll 1$  (équation (3.39)), donc dans l'expression (3.42) :  $\ln(1 - \langle T \rangle) \simeq -4\kappa$

ment en fonction de  $M$  et  $d$  comme

$$d\sqrt{\frac{2}{M}} \ll 1. \quad (3.61)$$

Dans nos simulations numériques,  $d\sqrt{\frac{2}{M}} = 0.166 \simeq 0.17$ .

### 3.2.4 Au delà du couplage faible

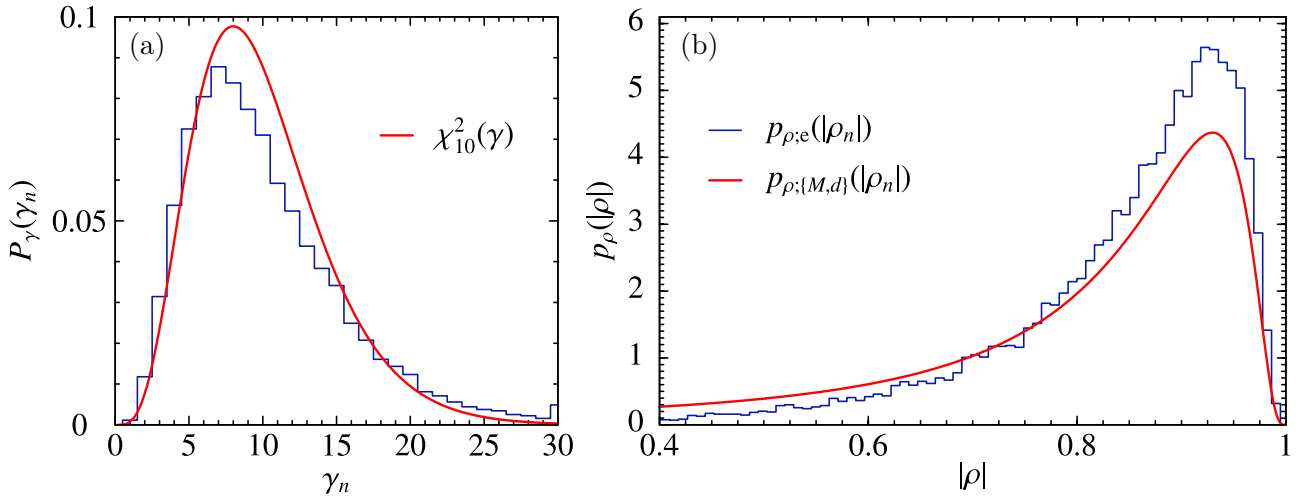


FIGURE 3.5 – **Distribution des largeurs (a) et de la *phase rigidity* (b)** associées aux valeurs propres et vecteurs propres complexes de 376 matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$  de taille  $N = 700$  avec  $M = 10$  et  $\kappa = \pi/2M$ . Les courbes en trait continu rouge sont les distributions attendues en couplage faible à savoir  $\chi_M^2(\gamma)$  et  $p_{\rho;\{M,d\}}(\rho)$  avec  $M = 10$  et  $d = 1.01$ . Le système n'est clairement plus en régime de couplage faible.

L'objet de cette section est de montrer si les distributions présentées dans la section précédente continuent de rendre compte des statistiques des systèmes ondulatoires chaotiques ouverts, lorsque le couplage avec l'environnement ne peut plus être considéré comme faible. Pour cela, comme précédemment, on diagonalise 376 hamiltoniens effectifs aléatoires  $H_{\text{eff}}$  de rang  $N = 700$ . On fixe toujours  $M = 10$  et on pose  $\kappa = \pi/2M$ . On restreint l'échantillon statistique aux vecteurs propres et valeurs propres qui sont au centre de la loi semi-circulaire ( $|\tilde{\varepsilon}_n| < 0.05$ ). Le recouvrement modal au centre de la loi circulaire est estimé à  $d = 1.01$  d'après la définition (3.41). On calcule également  $\sqrt{\text{Var}(\Gamma_n)}/\Delta = 0.532$ ,



valeur encore inférieure à 1 mais plus vraiment petite devant 1. L'estimation du nombre de canaux à partir des variances et moyennes de  $\Gamma_n$  donne  $2\bar{\Gamma}_n^2/\text{Var}(\Gamma_n) = 7.2 \neq M$ . Maintenant, on compare les distributions empiriques des  $\gamma_n$  ( $P_\gamma(\gamma_n)$ ) et des  $|\rho_n|$  ( $p_{\rho,e}(|\rho_n|)$ ), respectivement représentées par les histogrammes en bleu des figures 3.5a et 3.5b, aux distributions dérivées en supposant un couplage faible,  $\chi_M^2$  et  $p_{\rho;\{M,d\}}(\rho)$  avec  $M = 10$  et  $d = 1.01$  (lignes continues rouges dans la Figure 3.5). On observe qu'aucune des deux distributions analytiques n'est en accord avec les histogrammes. Si l'on remplace  $M$  dans les expressions de  $\chi_M^2$  et  $p_{\rho;\{M,d\}}$  par la valeur donnée par  $2\bar{\Gamma}_n^2/\text{Var}(\Gamma_n) = 7.2$ , on n'obtient pas de meilleur accord avec les histogrammes. Il en va de même en laissant  $M$  libre ( $d$  reste fixé) et en tentant d'ajuster les distributions empiriques  $P_\gamma(\gamma_n)$  et  $p_{\rho,e}(|\rho_n|)$  par  $\chi_M^2$  et  $p_{\rho;\{M,d\}}(\rho)$ . En effet, l'accord n'est pas meilleur et les valeurs de  $M$  renvoyées par les deux ajustements ne sont pas cohérentes entre elles puisque l'ajustement de  $P_\gamma$  avec  $\chi_M^2$  donne  $M = 7.558$  et l'ajustement de  $p_{\rho,e}$  avec  $p_{\rho;\{M,d\}}$  donne  $M = 13.12$ . En dehors du régime de couplage faible, les distributions  $\chi_M^2$  et  $p_{\rho;\{M,d\}}$  ne peuvent donc en aucune manière rendre compte des distributions des  $\gamma_n$  et des  $\rho_n$ .

On compare à présent la distribution des intensités normalisées ( $P(\tilde{I}_n)$ ) de l'ensemble des vecteurs propres utilisés pour calculer  $p_{\rho,e}(|\rho_n|)$ , avec les distributions  $P^e(\tilde{I})$ ,  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I})$  et  $P^{\text{PT}}(\tilde{I})$  où  $P^e(\tilde{I})$  et  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I})$  correspondent respectivement à la distribution (3.50) avec  $p_\rho = p_{\rho,e}$  et  $p_\rho = p_{\rho;\{M,d\}}$  avec  $M = 10$  et  $d = 1.01$  et  $P^{\text{PT}}$  désigne la loi de Porter-Thomas. Les résultats sont présentés dans la Figure 3.6 sous la même forme que ceux de la Figure 3.3. Encore une fois, on observe un accord parfait entre  $P^e(\tilde{I})$  (courbe en bleu) et  $P(\tilde{I}_n)$  (histogramme noir). Cependant, hors du régime de couplage faible,  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I})$  ne permet plus de décrire la distribution des  $\tilde{I}_n$  (ceci est en accord avec les observations sur  $p_\rho = p_{\rho;\{M,d\}}$ ) comme le montre son écart relatif avec  $P^e(\tilde{I})$  (ligne continue rouge en insert) qui atteint près de 13% pour les valeurs les plus probables et plus de 18% sur la queue de la distribution. Dans ce régime, le désaccord entre  $P^{\text{PT}}(\tilde{I})$  et  $P(\tilde{I}_n)$  est encore

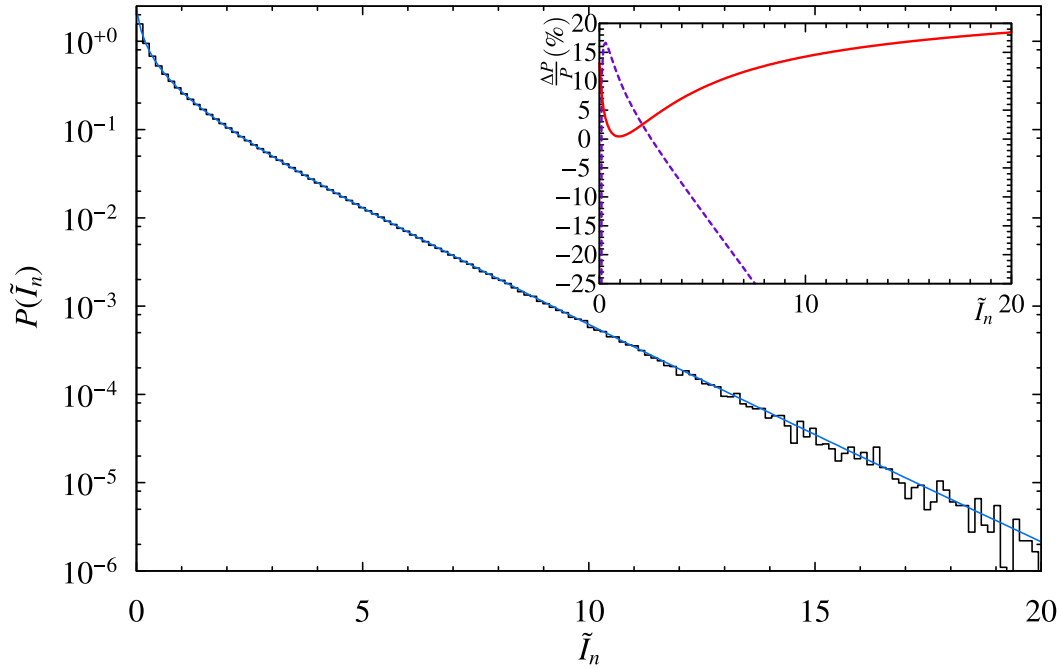


FIGURE 3.6 – Distribution d'intensité d'un ensemble de vecteurs propres hors du régime de couplage faible.

plus marqué.

Pour ne pas surcharger cette section, nous n'avons pas présenté toutes les simulations TMA que nous avons réalisées. Nous allons donc faire à présent un résumé de nos observations. Premièrement, il semblerait que l'on ait toujours

$$2\bar{\Gamma}_n^2/\text{Var}(\Gamma_n) \leq M \quad (3.62)$$

où  $M$  est le nombre de canaux effectivement présents dans  $H_{\text{eff}}$ . Ensuite, quelles que soient les valeurs de  $\kappa$  et de  $M$  choisies, la distribution  $P^e(\tilde{I})$  définie par l'équation (3.55) rend toujours parfaitement compte de la distribution des  $\tilde{I}_n$ , même lorsque l'on observe un piégeage des résonances<sup>26</sup>. Il semblerait que, jusqu'à présent, il n'avait jamais été démontré que les vecteurs propres des matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$ , dont la partie hermitienne

26. Lorsque le couplage est trop fort les résonances sont séparées en deux groupes, l'un des groupes est constitué de  $N - M$  résonances avec des largeurs très faibles, l'autre groupe étant constitué de  $M$  résonances avec des largeurs très grandes [103, 112]. Plus  $\kappa$  est grand, plus le premier groupe se rapproche de l'axe réel et plus le second s'en éloigne (voir par exemple [111, Chapitre 1])

est une matrices GOE, vérifiaient les prédictions du modèle de Pnini et Shapiro, que ce soit en régime de couplage faible ou non.

### 3.2.5 Distribution spatiale de l'intensité de la réponse d'une cavité chaotique ouverte

Originellement, les hypothèses de Pnini et Shapiro [113] ne sont pas restreintes aux seuls champs propres des cavités chaotiques présentant des pertes. Elles doivent donc pouvoir s'appliquer à tout champ  $\Psi(\vec{r}, f)$ , réponse d'une cavité chaotique ouverte à une excitation quelconque  $s(\vec{r}, f)$ . Comme nous sommes intéressés par les statistiques du champ dans une cavité soumise à une excitation à une fréquence donnée, on peut s'abstenir de décrire spatialement la source  $s(\vec{r}, f)$  en ne considérant que la fonction de Green  $G(\vec{r}, \vec{r}', f)$ . Comme nous l'avons mentionné plus haut, la fonction de Green présente l'avantage qu'une fois les valeurs propres complexes et les champs propres associés connus, on peut simuler, en tout point  $\vec{r}$  de la cavité, la réponse à une excitation ponctuelle localisée en  $\vec{r}'$  et oscillant à une fréquence  $f$ , grâce à la décomposition modale de  $G$  décrite par l'expression (3.26) que l'on rappelle ici :

$$G(\vec{r}, \vec{r}', k = 2\pi f/c) = \sum_n \frac{\Psi_n(\vec{r})\Psi_n(\vec{r}')}{k^2 - k_n^2} \quad (3.63)$$

Nous proposons d'étudier les propriétés statistiques de la réponse d'une cavité chaotique grâce à la TMA appliquée à  $H_{\text{eff}}$ . En nous reposant sur l'équivalence statistique entre les champs propres  $\Psi_n(\vec{r})$  d'une cavité chaotique ouverte et les composantes  $\Psi_{n,i}$  des vecteurs propres d'un hamiltonien effectif aléatoire  $H_{\text{eff}}$ , on peut étudier les statistiques spatiales de  $G(\vec{r}, \vec{r}', f)$  en considérant une réponse TMA "artificielle", noté  $\mathcal{G}(\varepsilon)$ , dont chaque élément  $\mathcal{G}_{ij}(\varepsilon)$  est défini à partir des  $\Psi_{n,i}$  et des valeurs propres complexes  $\varepsilon_n$  d'un  $H_{\text{eff}}$

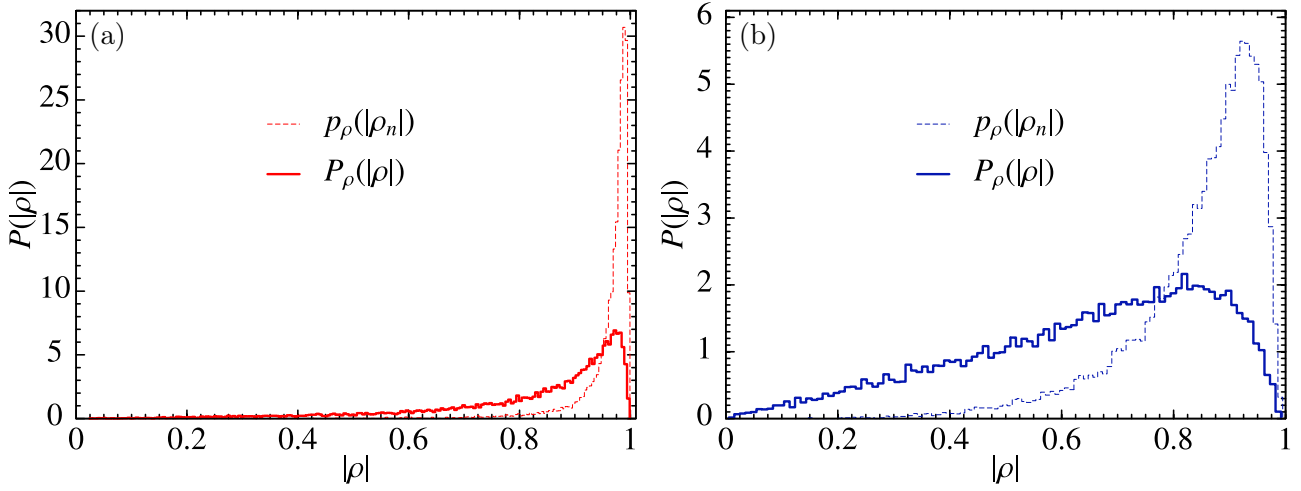


FIGURE 3.7 – Illustration de la non équivalence entre la distribution de la *phase rigidity* d'un ensemble de réponses et celle des vecteurs propres associés. (a) Distributions associées à un ensemble d'hamiltonien effectifs aléatoires en régime de couplage faible. (b) Distributions associées à un ensemble d'hamiltonien effectifs aléatoires en régime de couplage modéré.

donné par :

$$\mathcal{G}_{ij}(\varepsilon) = \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} \frac{\Psi_{n,i}\Psi_{n,j}}{\varepsilon - \varepsilon_n} \quad (3.64)$$

avec  $n_{min}$  et  $n_{max}$  les indices des vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont les plus proches des limites haute et basse imposées par la restriction au centre de la loi semi-circulaire ( $|\text{Re}[\varepsilon_n]| < 0.05$ ). On va choisir la convention suivante : l'indice  $i$  représente le point de mesure et l'indice  $j$  la position de la source. On définit donc la *phase rigidity* de la réponse à une excitation donnée par

$$\rho_{j,\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1, i \neq j}^N \mathcal{G}_{i,j}^2(\varepsilon)}{\sum_{i=1, i \neq j}^N |\mathcal{G}_{i,j}^2(\varepsilon)|^2} \quad (3.65)$$

et l'intensité normalisée de la réponse par

$$\tilde{I}_{i,j,\varepsilon} = \frac{|\mathcal{G}_{ij}(\varepsilon)|^2}{\langle |\mathcal{G}_{ij}(\varepsilon)|^2 \rangle_i} = \frac{(N-1) |\mathcal{G}_{ij}(\varepsilon)|^2}{\sum_{i=1, i \neq j}^N |\mathcal{G}_{ij}(\varepsilon)|^2} \quad (3.66)$$

Pour alléger les notations, on omettra à présent les indices  $j, \varepsilon$  dans  $\rho$  et  $i, j, \varepsilon$  dans  $\tilde{I}$ . On va également adopter la notation  $P_\rho$  afin de différencier la distribution de la *phase rigidity* d'une réponse de celle des champs propres désignée par  $p_\rho$ . De manière générale,  $P_\rho \neq p_\rho$ , sauf dans un régime de faible recouvrement modal, c'est-à-dire pour des résonances bien isolées ( $d \ll 1$ ) [132]. Pour illustrer cette dernière remarque, on calcule deux ensembles de fonction de Green  $\mathcal{G}(\varepsilon)$ . Le premier est associé à l'ensemble de 376 hamiltoniens effectifs aléatoires avec  $M = 10$  et  $\kappa = 0.058$  (déjà présenté dans la section 3.2.3) qui correspond à un régime de couplage faible. Pour chaque  $H_{\text{eff}}$  de cet ensemble, on calcule 100 réponses  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  (expression (3.64)) en fixant pour chacune le point d'excitation  $j = 1$  et en prenant 100  $\varepsilon$  équirépartis dans l'intervalle  $[-0.025, 0.025]$ <sup>27</sup>. Le second ensemble de réponse TMA est calculé de la même façon à partir des 376 matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$ , avec  $M = 10$  et  $\kappa = \pi/2M$  (section 3.2.4) qui correspondent à un système modérément couplé à son environnement. Dans la Figure 3.7, les distributions  $P_\rho(|\rho|)$  associées à ces deux ensembles de réponses (histogrammes en trait plein) sont comparées aux distributions  $p_\rho(|\rho_n|)$  associées aux champs propres à partir desquels ses réponses sont calculées (histogrammes en tirets). Que le régime de couplage soit faible (Figure 3.7a) ou modéré (Figure 3.7b), les deux distributions sont très différentes. Si les hypothèses de Pnini et Shapiro sont vérifiées, pour un ensemble de réponses, la distribution de  $\tilde{I}$  est prédite par

$$P(\tilde{I}) = \int_0^1 P_\rho(\rho) P(\tilde{I}; \rho) d\rho. \quad (3.67)$$

où  $P(\tilde{I}; \rho)$  est donnée par la formule (3.49). En remplaçant l'expression (3.67) par la formule discrète (3.55), on peut utiliser les deux distributions empiriques  $P_\rho(\rho)$ , montrées dans la Figure 3.7, pour prédire la distribution des  $\tilde{I}$  des deux ensembles respectifs de réponses auxquelles elles sont associées. Les résultats sont montrés dans la Figure 3.8. Les histogrammes en orange et en bleu correspondent respectivement aux distributions

---

27. Cet intervalle est volontairement choisi au centre de l'intervalle de restriction  $[-0.05, 0.05]$  utilisé pour sélectionner seulement les vecteurs propres au centre de la loi semi-circulaire.

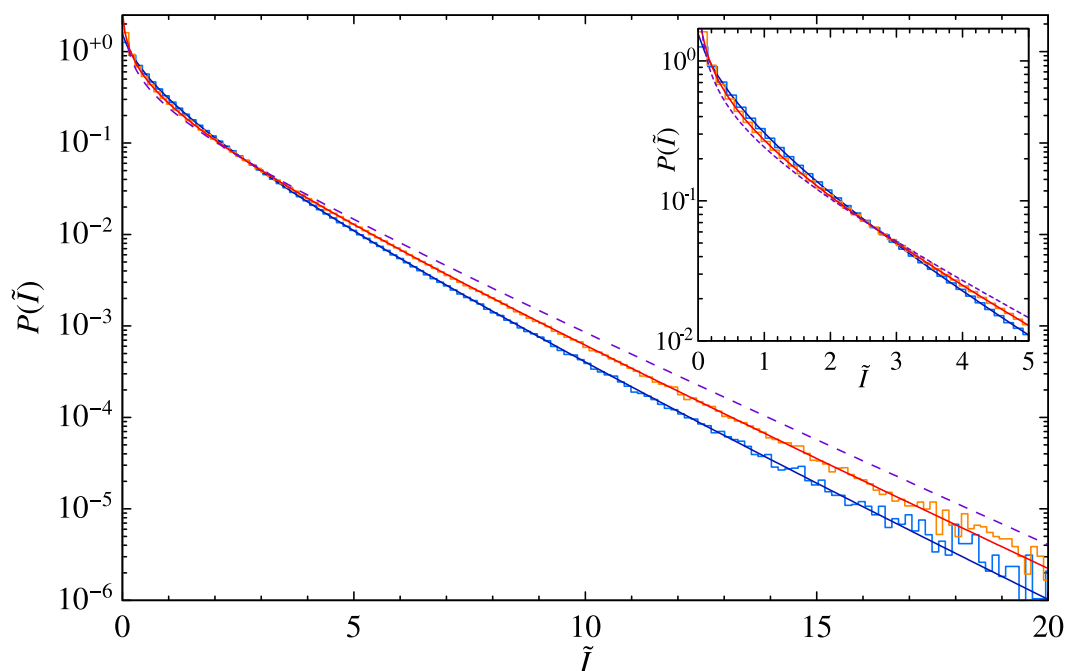


FIGURE 3.8 – **Distributions d'intensité normalisée d'un ensemble de réponses  $\mathcal{G}(\varepsilon)$ .** En orange et en rouge : la distribution des  $\tilde{I}$  et la prédiction (3.67) pour un régime de couplage faible. En bleu et bleu foncé : la distribution des  $\tilde{I}$  et la prédiction (3.67) pour un régime de couplage modéré. Tirets violets : distribution de Porter-Thomas. Insert : Zoom de la figure principale pour  $\tilde{I}$  entre 0 et 5

de  $\tilde{I}$  pour le régime de couplage faible et le régime de couplage modéré. Les courbes en trait continu représentent l'évaluation de (3.67) grâce aux distributions empiriques  $P_\rho(|\rho|)$  (courbe rouge pour le couplage faible, courbe bleue pour le couplage modéré). On peut observer pour les deux régimes de couplage un accord parfait sur près de 6 décades. La courbe tireté en violet correspond à la loi de Porter-Thomas attendue pour les réponses d'un système fermé chaotique. Celle-ci ne peut d'écrire aucune des distributions. L'insert est seulement un zoom de la figure principale pour  $\tilde{I}$  entre 0 et 5.

## Résumé

Dans ce chapitre, nous avons présenté le formalisme de l'hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , qui permet de représenter les mécanismes de pertes d'une cavité de manière unifiée, ainsi que

les notions et quantités qui lui sont afférentes : valeurs propres complexes, canaux de fuite, bi-orthogonalité des champs propres, *phase rigidity*, etc. Nous avons montré, grâce à la TMA appliquée à  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , que dans une cavité chaotique faiblement couplée à son environnement, les statistiques des largeurs des résonances ainsi que celles de la *phase rigidity* et de l'intensité des champs propres, peuvent être prédites analytiquement grâce seulement à deux paramètres : le nombre de canaux de fuite  $M$  et le recouvrement modal moyen,  $d$ . Enfin nous avons démontré, toujours en utilisant la TMA et en étudiant la distribution spatiale des intensités normalisées  $\tilde{I}$ , que quel que soit le régime, le champ dans une cavité chaotique ouverte, qu'il soit associé aux champs propres ou à la réponse à une excitation par une source, suit toujours strictement le modèle de Pnini et Shapiro [113]. En conséquence, la distribution  $P(\tilde{I}) = \int_0^1 P_\rho(\rho)P(\tilde{I}; \rho)d\rho$  peut servir comme quantité de référence pour détecter la présence de composantes non-universelles<sup>28</sup> dans un ensemble de fonctions d'ondes chaotiques.

---

28. On entend par composantes non-universelles des champs qui ne sont pas spatialement statistiquement uniformes et isotropes, i.e qui ne vérifient pas les hypothèses de Pnini et Shapiro.





# Chapitre 4

## Statistiques universelles des chambres réverbérantes chaotiques à pertes

Dans ce chapitre, nous allons étudier expérimentalement et numériquement les propriétés spatiales du champ dans une cavité EM 3D chaotique présentant des pertes. Les simulations dans ce chapitre rendront compte de manière plus réaliste de la situation expérimentale rencontrée dans une CR chaotique. Nous commencerons par présenter la CR commerciale rendue chaotique. À l'aide de la technique appelée *harmonic inversion*(HI) [117, 133, 134]<sup>1</sup>, nous extrairons les fréquences centrales et les largeurs des résonances constituant les spectres mesurés pour différentes configurations de la CR. Nous en déduirons le recouvrement modal moyen  $d$  et le facteur de qualité moyen  $Q$  de la CR, dans la fenêtre fréquentielle utilisée. L'ordre de grandeur de ces deux paramètres sera conservé dans notre modèle numérique simplifié. Ensuite, nous montrerons comment étendre les prédictions de la *TMA* appliquée à  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  au système chaotique dont le champ est vectoriel. L'extension reposera essentiellement sur les définitions de la bi-orthogonalité et de la *phase rigidity* pour de tels systèmes. Nous démontrerons ensuite que ces prédictions étendues sont valables uniquement dans une CR chaotique. Enfin, nous

---

1. Le lecteur intéressé par une description de la méthode d'HI pourra se référer à la référence [133].

comparerons la CR commerciale et sa version chaotique au travers d'une quantité définie dans la norme d'utilisation [4], pour quantifier, à une fréquence donnée, les fluctuations des valeurs maximales du champ dans la cavité. Cette quantité, notée  $\sigma_{dB}$ , est utilisée dans la norme internationale pour définir un critère d'uniformité du champ : lorsque  $\sigma_{dB} < 3$ , le champ dans la CR est considéré comme statistiquement uniforme et isotrope. Cette même quantité est utilisée pour définir la LUF comme étant la fréquence à partir de laquelle le critère d'uniformité est toujours vérifié<sup>2</sup>. Nous montrons que ce critère bien que couramment utilisé dans les CRBM conventionnelles, est pertinent uniquement si ces dernières sont chaotiques. Le critère d'uniformité étant corrélé à la distribution de maxima du champ, nous montrerons que celle-ci peut être prédite dans une CR chaotique.

---

2. La norme ne tolère, par octave, que 3 valeurs, au plus, au dessus du seuil.

## 4.1 CR chaotique expérimentale

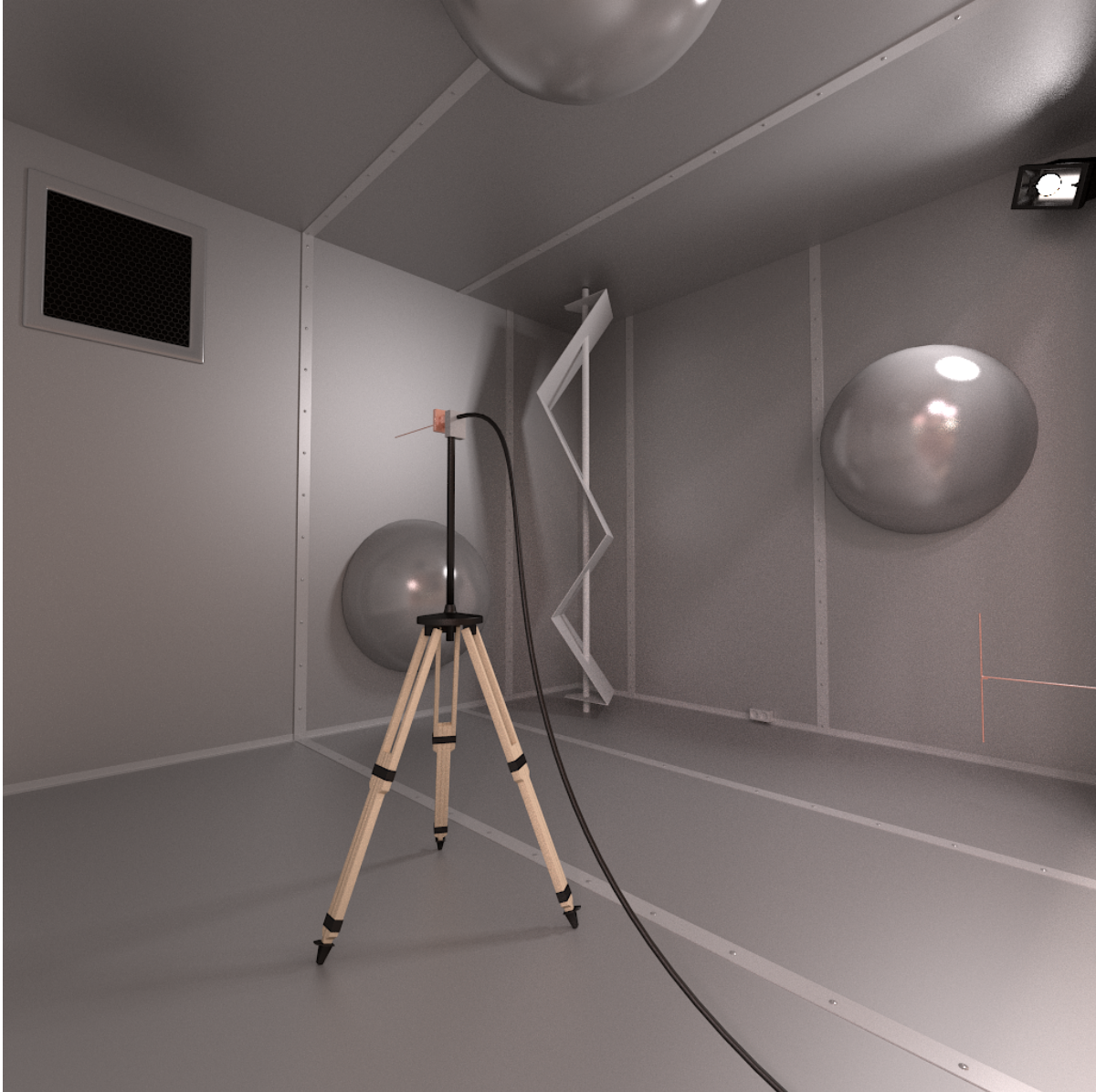


FIGURE 4.1 – **Vue d’artiste 3D de la CR chaotique expérimentale.** La CR de l’ESYCOM d’un volume de  $19.1\text{ m}^3$  est rendue chaotique par l’ajout de 3 hémisphères, métalliques d’un rayon de 40 cm, maintenues aux murs et au plafond par des aimants. Sont également représentés : 1) le système de mesure constitué par une antenne dipôle placée dans un mur face au brasseur (elle n’est pas représenté à l’échelle) et une antenne monopôle placée dans la CR sur un trépied en bois. 2) Les sources de pertes (autres que les pertes ohmiques sur les parois et le couplage aux antennes) que constituent la grille d’aération, les jointures entre les panneaux, le système d’éclairage, le trépied ou encore les prises de courant.

### 4.1.1 Description du dispositif expérimental

La CR conventionnelle que nous allons rendre chaotique par des modifications simples est la CR présente au laboratoire ESYCOM. Celle-ci a une surface au sol  $L_x \times L_y = 2.751 \times 2.951 = 8.12 \text{ m}^2$  et une hauteur sous plafond  $L_z = 2.354 \text{ m}$ . Le volume du brasseur étant négligeable, le volume total de la CR est  $V = 19.1 \text{ m}^3$ . Pour rendre chaotique cette CR, nous utilisons des hémisphères ( $hs$ ) en polystyrène de 40 cm de rayon, creux et dont on tapisse la surface avec des bandes d'aluminium. Chaque  $hs$  pesant seulement 750 g, on peut les maintenir aux murs de la cavité grâce à cinq aimants répartis le long de leur section transverse. Au chapitre 2, l'étude numérique d'une cavité sans pertes, de même dimension et possédant un brasseur de géométrie identique à celle du brasseur de la CR de l'ESYCOM (Figure 2.8), a démontré que pour rendre chaotique cette CR commerciale par l'ajout d'hémisphères métalliques d'un rayon de 40 cm, il faut en utiliser au minimum 3 (Figure 2.7), répartis sur les parois de la cavité de sorte à limiter les surfaces en vis-à-vis parallèles. La Figure 4.1 montre la position de ces 3 demi-sphères dans la CR expérimentale. On remarquera que ces modifications présentent l'avantage d'être à la fois géométriquement simples, peu coûteuses (ni en temps de réalisation, ni financièrement) et modulables à volonté<sup>3</sup>. Pour réaliser les mesures, on utilise une antenne dipôle fixe, placée en face du brasseur dans un mur de la CR et une antenne monopôle installée sur un trépied en bois pouvant être déplacé à l'intérieur de la cavité (Figure 4.1). Les deux antennes sont connectées à un analyseur de réseaux vectoriel ROHDE&SCHWARZ ZNB8. Les mesures sont réalisées sur une bande de fréquences de 20 MHz autour de 400 MHz. On travaille donc autour du 369<sup>e</sup> mode et on estime le nombre de résonances dans cette bande de 20 MHz à  $\bar{\nu}(400 \text{ MHz}) \times 20 \text{ MHz} \simeq 56 \text{ modes}$ <sup>4</sup>. La LUF estimée par le fabricant de la CR est aux alentours de 300 MHz, on est donc légèrement au dessus de la LUF.

3. Ces modifications ne nécessitent aucun percement ni aucune modification permanente de la CR d'origine.

4. Pour estimer le nombre de modes autour de 400 MHz et le numéro du mode le plus proche, on a seulement utilisé le premier terme des lois de Weyl (1.4) et (2.5)

Enfin, on profitera du brasseur pour modifier la configuration de la CR et réaliser des moyennes d'ensembles.

### 4.1.2 Vérification de la chaoticité de la CR

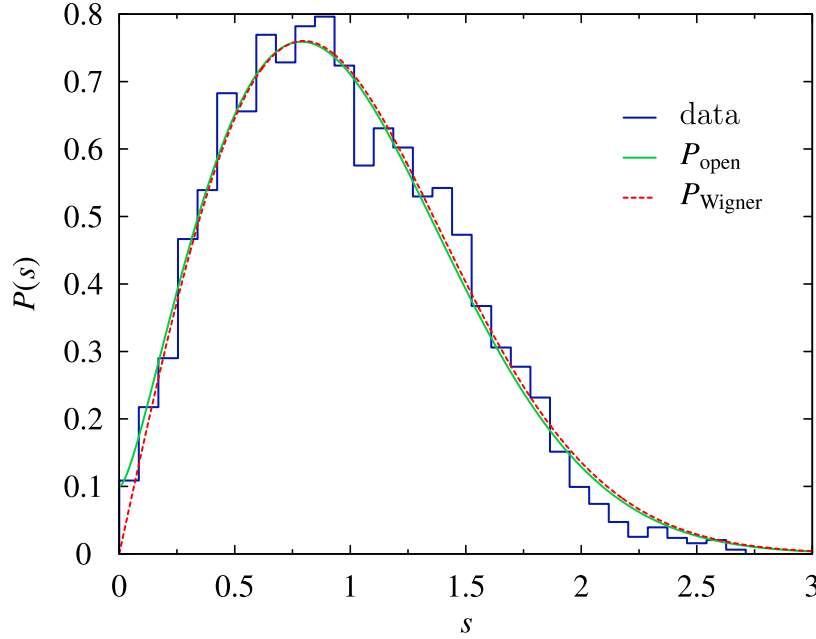


FIGURE 4.2 – NNSD expérimentale

Par la méthode HI<sup>5</sup>, on obtient pour plusieurs configurations de la CR chaotique (plusieurs positions de brasseur) les largeurs  $\Gamma_n$  et fréquences centrales  $f_n$  des résonances. Comme la bande spectrale est assez réduite, tester expérimentalement la chaoticité à l'aide du *number variance*  $\Sigma^2$  n'est pas pertinent. En revanche on peut tester la NNSD. La distribution obtenue est montrée sur la Figure 4.2 (histogramme bleu) et elle est comparée à deux distributions théoriques. La première est le *Wigner surmise*  $P_{\text{Wigner}}$  (courbe en tirets rouge). La seconde est la NNSD d'un système chaotique ouvert, notée ici  $P_{\text{open}}$ , dérivée grâce à la TMA et  $H_{\text{eff}}$  par C. Poli et al. [118] de manière exacte dans le cas de pertes liées à un unique canal ( $M = 1$ ). Les auteurs ont montré que la distribution pour

5. Le code utilisé a été précédemment développé par U. Kuhl et déjà utilisé par ce dernier pour l'analyse des distributions des largeurs de résonances d'une cavité microonde chaotique [117]

un système ouvert pouvait s'écrire sous la forme  $P_{\text{open}}(s) = f(s; \kappa) \exp(-As/2)$  ou  $f(s; \kappa)$  est une fonction assez complexe<sup>6</sup> dépendant explicitement du couplage  $\kappa$ , négligeable devant  $\exp(-As/2)$  pour  $s \gg 1$ , et modifiant la NNSD de manière significative pour les  $s \sim 0$ . La principale différence entre  $P_{\text{Wigner}}$  et  $P_{\text{open}}$  apparaît donc pour les petits espacements, l'ouverture du système supprimant la répulsion de niveaux<sup>7</sup>. C. Poli et al. ont montré que la forme analytique continue à fonctionner pour  $M > 1$ , si on considère  $\kappa$  comme un paramètre ajustable (un couplage effectif). La courbe verte de la Figure 4.2 est donc le résultat d'un ajustement. Le bon accord entre l'histogramme et  $P_{\text{Wigner}}$  ou  $P_{\text{open}}$  prouve que la CR est bien chaotique tandis que la faible différence entre  $P_{\text{Wigner}}$  et  $P_{\text{open}}$  tend à montrer que le couplage vers l'extérieur est relativement faible.

### 4.1.3 Recouvrement modal moyen et facteur de qualité moyen

Comme HI permet d'obtenir les largeurs des résonances, on peut donc calculer, pour la gamme de fréquences étudiée, le recouvrement modal moyen

$$d = \langle \Gamma_n \rangle / \Delta = 0.89 \quad (4.1)$$

et la facteur de qualité moyen

$$Q = \langle f_n / \Gamma_n \rangle = 1542. \quad (4.2)$$

Connaissant la valeur du facteur de qualité moyen on peut essayer de déterminer quels sont les mécanismes de pertes qui y contribuent majoritairement. Commençons par estimer l'ordre de grandeur du facteur de qualité lié aux pertes ohmiques sur les parois de la CR, on le notera  $Q_\Omega$ . Dans une cavité, l'ordre de grandeur du facteur de qualité lié à des

---

6. Nous ne reporterons pas son expression dans ce manuscrit, le lecteur intéressé pourra consulter l'article original [118].

7. On remarquera qu'expérimentalement faire la différence entre les deux distributions peut se révéler assez difficile car ce sont justement les petits espacements qui sont les plus difficiles à évaluer et à peupler.

pertes ohmiques sur une surface  $S$  de conductivité électrique  $\sigma_p$  peut être estimé par la relation [22, 61, 135] :

$$Q_\Omega \sim \frac{V}{S\delta} \quad (4.3)$$

où  $V$  est le volume de la CR et  $\delta = \sqrt{2/(\mu_0\omega\sigma_p)}$ , l'épaisseur de peau du matériau constituant  $S$ . Les parois de la CR sont en acier galvanisé. Le rapport entre la conductivité de ce matériau et celle du cuivre  $\sigma_{\text{Cu}} = 5.7 \times 10^7$  S/m étant environ de 7%, les parois de la CR on donc une conductivité  $\sigma_{\text{murs}} \simeq 4 \times 10^6$  S/m. Pour les hémisphères, en aluminium, leur conductivité est  $\sigma_{\text{Al}} \simeq 0.61\sigma_{\text{Cu}} = 3.7 \times 10^7$  S/m. Le facteur de qualité lié au pertes ohmiques sur l'ensemble des bords de la CR est lié au facteur de qualité des murs  $Q_{\text{murs}}$  et des  $hs$   $Q_{hs}$  par la relation :

$$\begin{aligned} Q_\Omega^{-1} &= Q_{\text{murs}}^{-1} + Q_{hs}^{-1} \\ &\simeq \frac{S_{\text{murs}}\sqrt{2}}{V\sqrt{(\mu_0\omega\sigma_{\text{murs}})}} + \frac{3S_{hs}\sqrt{2}}{V\sqrt{(\mu_0\omega\sigma_{\text{Al}})}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Étant donné que  $S_{\text{murs}} \gg S_{hs}$  et  $\sigma_{\text{Al}} \simeq 10 \sigma_{\text{murs}}$  on peut négliger les pertes introduites par les demi-sphères devant les pertes liées aux parois de la CR. On a donc  $Q_\Omega \simeq Q_{\text{murs}} \simeq 32000$ . Il apparaît donc évident que dans la gamme de fréquences où l'on travaille, ce ne sont pas les pertes ohmiques qui prédominent. On va s'intéresser maintenant aux pertes induites par les antennes. Leur facteur de qualité peut être estimé grâce à la relation [22] :

$$Q_{\text{ant}} \sim \frac{16\pi^2 V}{N_a} \frac{f^3}{c^3} = 6\pi \frac{\mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f)}{N_a} \quad (4.5)$$

avec  $N_a = 2$  le nombre d'antennes (on les suppose équivalentes), et  $\mathcal{N}_{\text{Weyl}}(f)$  le terme dominant de la loi de Weyl (2.5). On a donc  $Q_{\text{ant}} = 6\pi(369/2) \simeq 3500$ . Ce calcul montre que dans nos expériences, les antennes sont responsables en bonne partie des pertes de la cavité. À ces dernières peuvent potentiellement être ajoutées les pertes liées aux jonctions



non parfaites entre les différents panneaux constituant les murs de la cavité, à la grille d'aération, au câble d'alimentation et au trépied de l'antenne à l'intérieur de la CR, au système d'éclairage ou encore aux prises de courant, etc. (Figure 4.1). On en déduit donc que les pertes dans notre CR sont principalement des pertes inhomogènes associées à des mécanismes localisés à différents endroits dans la cavité.

## 4.2 Modéliser la réponse d'une CR en présence de pertes

### 4.2.1 Introduire les pertes

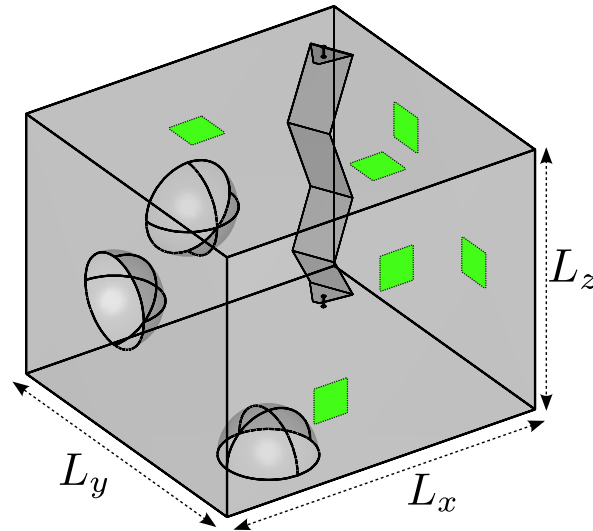


FIGURE 4.3 – **Introduction des pertes** dans la CR conventionnelle idéale rendue chaotique et présentée dans la Figure 2.8. Les carrés verts indiquent les patches sur lesquels sont localisés les pertes ohmiques. Leur conductivité est de quelques S/m afin d'assurer que  $Q \sim 1500$ . On rappelle les dimensions de la CR vide :  $L_x = 2.951$  m,  $L_y = 2.751$  m,  $L_z = 2.354$  m.

La Figure 4.1 illustre la complexité d'une CR expérimentale. Pour modéliser précisément un tel système, il faut à la fois prendre en compte la géométrie complexe de la cavité et modéliser les antennes et les différents mécanismes de pertes. Il apparaît alors assez évident qu'un modèle numérique prenant en compte tous ces paramètres serait difficile



à réaliser et les équations associées difficiles à résoudre. Dans un souci de simplification, nous avons donc choisi un modèle dans lequel les pertes sont uniquement dues à de l'absorption ohmique sur les parois de la cavité. Ces pertes sont introduites dans la cavité idéale<sup>8</sup> à l'aide de patchs absorbants identiques (voir Figure 4.3), de surface  $S_p$  et dont la conductivité  $\sigma_p$  est choisie de sorte que le facteur de qualité moyen  $Q$  reste proche de celui mesuré dans la CR expérimentale ( $Q \sim 1500$ ). Cette approche nous permet à la fois de rendre compte du caractère inhomogène des pertes dans une CR expérimentale en distribuant les patchs sur les parois de la CR et de faire varier le nombre de canaux de fuites identiquement couplés<sup>9</sup> associés aux pertes, en jouant sur le nombre et/ou la surface totale des patchs  $S_t = \sum S_p$ . Lorsque  $S_p \gg \lambda^2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde correspondant au centre de la fenêtre fréquentielle d'étude, on peut évaluer a priori le nombre de canaux de fuite grâce à la relation (3.28) :  $M = 2\pi S_t / \lambda^2$  (voir l'Annexe D et [122]).

### 4.2.2 Réponse d'une CR et tenseur de Green dyadique

Comme nous venons de le préciser au paragraphe précédent, nous ne considérons que des pertes ohmiques. Il n'est alors pas nécessaire de modéliser les antennes et leur couplage avec la cavité. Ainsi, de manière identique au chapitre 3, la fonction de Green est l'outil approprié pour étudier numériquement les statistiques spatiales de la réponse.

Dans une cavité EM 3D, le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, f)$ , réponse électromagnétique à une excitation de fréquence  $f$ , générée par une source de courant arbitraire  $\vec{J}_e(\vec{r}_0, f)$  localisée dans un volume  $V_0$ , est solution de l'équation [17, 18] :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - k^2 \vec{E} = -j\omega\mu_o \vec{J}_e \quad (4.6)$$

avec  $k = 2\pi f/c$ . Le champ électrique peut s'écrire en fonction du *tenseur de Green*

---

8. On entend par *cavité idéale* : une cavité dont les murs sont sans défaut et parfaitement conducteurs (voir chapitre 2).

9. Les patchs sont identiques.

*dyadique* (TGD)<sup>10</sup>, notée  $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f)$ , comme [17, 18] :

$$\vec{E}(\vec{r}, f) = -j\omega\mu_o \int_{V_0} \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f) \cdot \vec{J}_e(\vec{r}_0, f) d\vec{r}_0, \quad (4.7)$$

le TGD étant en effet solution de l'équation [17, 18] :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f = ck/2\pi) - k^2 \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f = ck/2\pi) = \mathbb{1}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (4.8)$$

Dans la littérature, le TGD est souvent écrit sous forme matricielle :

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

où chacune des colonnes ( $j = x, y$ , ou  $z$ ) contient les trois composantes cartésiennes du vecteur champ électrique

$$\vec{E}_j(\vec{r}, f) = \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f) \cdot \vec{e}_j = \begin{pmatrix} G_{xj} \\ G_{yj} \\ G_{zj} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Ainsi, le vecteur  $\{G_{xj}, G_{yj}, G_{zj}\}$  constitue la réponse électromagnétique de la cavité à une excitation par une source de courant unitaire équivalent à un dipôle ponctuel positionné en  $\vec{r}_0$ , polarisé selon  $\vec{e}_j$  et oscillant à une fréquence  $f$ . Comme pour la fonction de Green scalaire (3.26) et l'opérateur de Green associé à  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  (3.24), le TGD peut s'écrire en

---

10. Le TGD est aussi souvent appelé dans la littérature : *fonction de Green dyadique* (FGD)

fonction des champs propres  $\vec{E}_n$  et valeurs propres  $k_n$  de la CR comme [18]<sup>11</sup>

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, j = ck/2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 \vec{E}_n(\vec{r}) \otimes \vec{E}_n(\vec{r}_0)}{k^2(k_n^2 - k^2)} - \frac{1}{k^2} \mathbb{1} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (4.11)$$

où  $\cdots \otimes \cdots$  représente le produit tensoriel. Dans une cavité présentant des pertes, la somme porte sur les résonances complexes définies par les valeurs propres  $k_n = \frac{2\pi f_n}{c} (1 - \frac{i}{2Q_n})$ <sup>12</sup> et les champs propres complexes bi-orthogonaux  $\vec{E}_n$ , évalués au point de mesure  $\vec{r}$  et au point d'excitation  $\vec{r}_0$  (position de la source ponctuelle de courant). La relation (4.11) présente donc une singularité uniquement au point source. Pour  $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ , le TGD s'écrit simplement

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f = ck/2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 \vec{E}_n(\vec{r}) \otimes \vec{E}_n(\vec{r}_0)}{k^2(k_n^2 - k^2)} \quad (4.12)$$

Loin de la source, le TGD a pour approximation l'équation [18]<sup>13</sup>

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f = ck/2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}_n(\vec{r}) \otimes \vec{E}_n(\vec{r}_0)}{(k_n^2 - k^2)}. \quad (4.13)$$

Pour modéliser dans la CR montrée dans la Figure 4.3, la réponse à une excitation de fréquence  $f$ , il est donc nécessaire d'obtenir au préalable les champs propres  $\{\vec{E}_n\}$  et valeurs propres  $\{k_n\}$  de la CR autour de  $f$ . Ceux-ci peuvent être obtenus numériquement par la méthode des éléments finis<sup>14</sup> en utilisant les conditions aux bords appelées : *impedance boundary condition* [136–138]. Ces dernières permettent de tenir compte à la fois de la conductivité finie des patches et des conditions de métal parfait du reste des murs.

11. Voir par exemple la référence [18] pp 382-385 pour la démonstration.

12. Avec  $f_n$  la fréquence centrale de la  $n$ -ième résonance et  $f_n/Q_n = \Gamma_n$  sa largeur.

13. Dans l'équation (4.13) le terme lié à une famille de modes particuliers, les modes dit irrotationnels, souvent noté  $\vec{F}_n$ , est négligé car il s'annule loin de la source. Le terme négligé s'écrit  $-k^{-1} \sum_n \vec{F}_n(\vec{r}) \otimes \vec{F}_n(\vec{r}_0)$  (voir [18] chapitres 2 et 4 pour les détails).

14. Nous utilisons à cet effet le logiciel commercial Comsol®.

## 4.3 Adapter le formalisme de l'hamiltonien effectif aux cavités EM 3D (champs vectoriels)

Dans cette section, nous commencerons par définir pour des champs propres vectoriels, les notions de bi-orthogonalité, de *phase rigidity* et de paramètre de complexité introduits dans le chapitre 3 au travers du formalisme de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ . Puis nous montrerons que, dans une CR chaotique, les prédictions de la TMA appliquées à  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  peuvent être utilisées pour prédire les statistiques des quantités adaptées aux champs vectoriels.

### 4.3.1 Condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels

Nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur le fait que l'expression du TDG loin des sources, décrite par l'équation (4.13),

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}_0, f = ck/2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}_n(\vec{r}) \otimes \vec{E}_n(\vec{r}_0)}{(k_n^2 - k^2)},$$

est formellement équivalente à l'équation (3.24),

$$\mathcal{G}(E) = \sum_n \frac{|R_n\rangle\langle L_n|}{E - \varepsilon_n},$$

donnant la décomposition de l'opérateur de Green  $\mathcal{G}(E)$  sur les vecteurs Droit et Gauche de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ <sup>15</sup>. Cependant, cette remarque est utile à condition que les champs propres vectoriels soient correctement normalisés. Cette normalisation nous permettra de définir la condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels.

---

15. En effet, le projecteur quantique  $|\cdots\rangle\langle\cdots|$  n'est rien de moins que le produit tensoriel entre deux vecteurs de l'espace de Hilbert.

#### 4.3.1.1 Condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels : définition et propriétés

Si on applique aux champs propres intervenant dans  $\overline{\overline{G}}$  la transformation [139] :

$$\vec{\mathcal{E}}_n(\vec{r}) = \frac{\vec{E}_n(\vec{r})}{\sqrt{\int_V \vec{E}_n(\vec{r}') \cdot \vec{E}_n(\vec{r}') d\vec{r}'}}, \quad (4.14)$$

les nouveaux champs propres  $\vec{\mathcal{E}}_n$  ainsi normalisés vérifient automatiquement la relation

$$\boxed{\int_V \vec{\mathcal{E}}_n(\vec{r}') \cdot \vec{\mathcal{E}}_m(\vec{r}') d\vec{r}' = \delta_{nm}}, \quad (4.15)$$

où  $\int_V \cdots d\vec{r}'$  est l'intégrale sur les valeurs prises dans le volume  $V$  de la cavité. Pour alléger les notations, nous allons à présent omettre de préciser la dépendance spatiale ( $\vec{r}$ ) des champs. En comparant (4.15) avec la condition de bi-orthogonalité des vecteurs propres de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  donnée dans la chapitre 3 par le relation (3.12)  $\langle L_n | R_m \rangle = \delta_{nm}$ , il apparaît évident que l'équation (4.15) correspond à la condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels des cavités EM 3D à pertes [139]. Les équations (4.15) et (3.12) sont en fait formellement équivalentes si l'on suppose que le système est invariant par renversement du temps. L'absence de la conjugaison dans le produit scalaire intervenant dans (4.15) est effectivement due à la traduction pour un champ vectoriel de la contrainte (3.16) :  $\langle L_n | = |R_n\rangle^T = \langle R_n^* |$ , imposée aux vecteurs propres d'un  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  invariant par renversement du temps. De la condition de bi-orthogonalité (4.15) découle les relations suivantes entre parties réelle et imaginaire d'un même champ propre vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}_n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] d\vec{r} = 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \left( \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] - \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \right) d\vec{r} = 1 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \left( \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] + \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \right) d\vec{r} = \int_V \|\vec{\mathcal{E}}_n\|^2 d\vec{r} \geq 1 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

où  $\text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] = (\text{Re} [\mathcal{E}_{n,x}], \text{Re} [\mathcal{E}_{n,y}], \text{Re} [\mathcal{E}_{n,z}])$  et  $\text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] = (\text{Im} [\mathcal{E}_{n,x}], \text{Im} [\mathcal{E}_{n,y}], \text{Im} [\mathcal{E}_{n,z}])$  sont deux vecteurs contenant respectivement les parties réelle et imaginaire des composantes cartésiennes de  $\vec{\mathcal{E}}_n$ . Les équations (4.16), (4.17) et (4.18) sont les équivalents formels, pour un champ vectoriel, des relations (3.17), (3.18) et (3.19) présentées au chapitre 3. La relation (4.16) est une conséquence directe de l'invariance par renversement du temps. Pour un champ scalaire, celle-ci se traduit par des parties réelle et imaginaire orthogonales<sup>16</sup> (ou statistiquement indépendantes). Pour un champ vectoriel, nous allons montrer que la relation (4.16) est vérifiée car les parties réelle et imaginaire des composantes cartésiennes de  $\vec{\mathcal{E}}_n$  sont orthogonales.

#### 4.3.1.2 Condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels : vérification numérique

Dans la section précédente, nous avons mentionné que nous utilisons le logiciel commercial Comsol® pour obtenir numériquement les champs propres de la CR présentée sur la Figure 4.3. Les champs propres ainsi obtenus ne peuvent cependant pas être utilisés directement pour calculer le TGD (4.12). En effet, il semble que Comsol attribue arbitrairement à chacun des champs propres une phase globale différente d'un mode à un autre mais identique pour chaque composante cartésienne d'un même mode. Ceci est illustré par les Figures 4.4a et 4.4c, chacune représentant, pour un champ propre différent calculé par Comsol, noté  $\vec{E}_n$  ou  $\vec{E}_m$ , la distribution, dans le plan complexe, des valeurs prises par les trois composantes cartésiennes du mode en différents points de la cavité. Comme dans le chapitre 2, la variable  $E_{n;a}$  réunit l'ensemble des valeurs prises par les composantes cartésiennes de  $\vec{E}_n$ . Dans les Figures 4.4a et 4.4c, il apparaît clairement que les deux champs propres possèdent une phase globale très différente et ne peuvent donc pas être utilisés directement dans le TGD.

---

16. On rappelle que cette propriété se traduit par un champ complexe possédant spatialement une phase globale nulle (voir la Figure 3.1b)

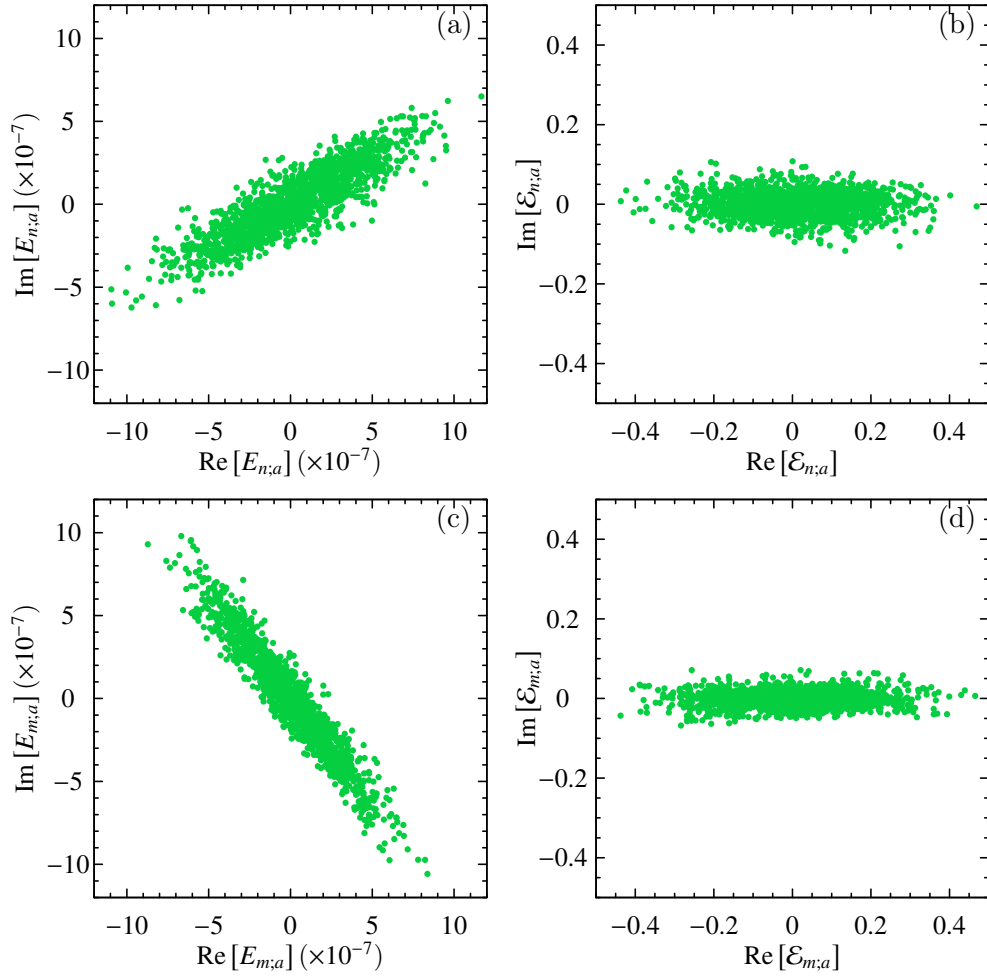


FIGURE 4.4 – **Effet de la normalisation (4.14) et champs propres bi-orthogonaux (4.15).** (a) et (c) Distribution dans le plan complexe des valeurs prises dans la CR par les composantes cartésiennes  $E_{n;a}$  et  $E_{m;a}$  de deux champs propres différents  $\vec{E}_n$  et  $\vec{E}_m$  calculé par FEM. (b) et (d) équivalent respectif de (a) et (c) après avoir appliqué la normalisation (4.14). On remarquera que les deux vecteurs résultants  $\vec{\mathcal{E}}_n$  et  $\vec{\mathcal{E}}_m$  sont bien bi-orthogonaux (4.15) et qu'on obtient des figures équivalentes à la Figure 3.1b

Ce problème est facilement résolu par la normalisation (4.14), qui tient compte de la bi-orthogonalité attendue des champs propres d'une cavité ouverte. L'effet de la normalisation est illustré, dans les Figures 4.4b et 4.4d, via la distribution dans le plan complexe de  $\mathcal{E}_{n;a}$  et  $\mathcal{E}_{m;a}$ , les composantes cartésiennes des vecteurs propres normalisés et bi-orthogonaux  $\vec{\mathcal{E}}_n$  et  $\vec{\mathcal{E}}_m$ . Ces figures démontrent clairement que (i) la normalisation (4.14) permet d'obtenir des champs propres ayant tous la même phase globale nulle et

(ii) que la condition  $\int_V \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] d\vec{r} = 0$  traduit bien le fait que chaque composante cartésienne d'un champ propre vectoriel bi-orthogonal possède des parties réelle et imaginaire orthogonales<sup>17</sup>.

### 4.3.2 *Phase rigidity* et paramètre de complexité d'un champ vectoriel

Dans le chapitre 3, la *phase rigidity* est apparue comme une quantité permettant de mesurer la complexité d'un champ mais aussi comme un paramètre déterminant de la distribution spatiale du champ dans une cavité chaotique présentant des pertes. Nous proposons de définir naturellement la *phase rigidity* d'un champ vectoriel  $\vec{E}$  par :

$$\rho = \frac{\int_V \vec{E} \cdot \vec{E} d\vec{r}}{\int_V ||\vec{E}||^2 d\vec{r}} \quad (4.19)$$

La *phase rigidity* ainsi définie vérifie toujours  $0 \leq |\rho| \leq 1$  et les limites  $\rho = 0$  et  $\rho = 1$  correspondent toujours respectivement au champ d'un système complètement ouvert et à celui d'un système complètement fermé. Si on applique la définition (4.19) aux champs propres bi-orthogonaux  $\vec{\mathcal{E}}_n$ , la condition (4.15) et la relation (4.18) impliquent que<sup>18</sup>

$$|\rho_n| = \rho_n = \frac{1}{\int_V ||\vec{\mathcal{E}}_n||^2 d\vec{r}} \leq 1. \quad (4.20)$$

Cette relation est donc formellement équivalente aux relations (3.35) et (3.48). Pour définir le paramètre de complexité  $q_n$  d'un champ propre vectoriel  $\vec{\mathcal{E}}_n$ , on part de la formule (3.37) qui le lie à  $\rho_n$  :

$$q_n^2 = \frac{1 - |\rho_n|}{1 + |\rho_n|}$$

17. C'est ce que démontre la phase globale nulle de  $\mathcal{E}_{n;a}$ .

18. L'équation (4.20) peut aussi s'écrire  $\rho_n = V^{-1} \left\langle ||\vec{\mathcal{E}}_n||^2 \right\rangle_{\vec{r}}^{-1} \leq 1$ , où  $\langle \dots \rangle_{\vec{r}}$  est la moyenne spatiale.



En utilisant la relation (4.20), on trouve que

$$q_n^2 = \frac{\int_V ||\vec{\mathcal{E}}_n||^2 d\vec{r} - 1}{\int_V ||\vec{\mathcal{E}}_n||^2 d\vec{r} + 1} \quad (4.21)$$

Enfin, en utilisant les équations (4.18) et (4.17) déduites de la bi-orthogonalité des champs propres, on peut remplacer dans (4.21) 1 par :

$$\int_V \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] d\vec{r} - \int_V \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] d\vec{r}$$

et  $\int_V ||\vec{\mathcal{E}}_n||^2 d\vec{r}$  par :

$$\int_V \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] d\vec{r} + \int_V \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] d\vec{r}. \quad (4.22)$$

On obtient alors la définition du paramètre de complexité des champs propres vectoriels [139] :

$$q_n^2 = \frac{\left\langle \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Im} [\vec{\mathcal{E}}_n] \right\rangle_{\vec{r}}}{\left\langle \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \cdot \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}_n] \right\rangle_{\vec{r}}}. \quad (4.23)$$

où  $\langle \dots \rangle_{\vec{r}}$  désigne la moyenne spatiale.

Il apparait donc évident maintenant que le formalisme de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  peut être adapté aux systèmes ouverts dont le champ est représenté par une quantité vectorielle. Nous allons dans le paragraphe suivant montrer que, si ces systèmes ouverts sont chaotiques, alors la TMA permet de prédire leurs comportements statistiques.

### 4.3.3 Les prédictions de la TMA pour les cavités EM 3D chaotiques avec des pertes

#### 4.3.3.1 Distribution du paramètre de complexité, de la *phase rigidity*, et des composantes cartésiennes

Le paramètre de complexité (4.23) peut être exprimé en fonction des composantes cartésiennes de  $\vec{\mathcal{E}}_n$  comme :

$$q_n^2 = \frac{\langle \text{Im} [\mathcal{E}_{n,x}]^2 + \text{Im} [\mathcal{E}_{n,y}]^2 + \text{Im} [\mathcal{E}_{n,z}]^2 \rangle}{\langle \text{Re} [\mathcal{E}_{n,x}]^2 + \text{Re} [\mathcal{E}_{n,y}]^2 + \text{Re} [\mathcal{E}_{n,z}]^2 \rangle} \quad (4.24)$$

Comme nous considérons ici une CR chaotique, on peut supposer que ses champs propres  $\vec{\mathcal{E}}_n$  sont statistiquement isotropes, c'est-à-dire que leurs composantes cartésiennes sont assimilables à des variables aléatoires complexes identiquement distribuées et indépendantes<sup>19</sup>. L'isotropie implique donc

$$q_n^2 = \frac{\langle \text{Im} [\mathcal{E}_{n,u}]^2 \rangle}{\langle \text{Re} [\mathcal{E}_{n,u}]^2 \rangle} \quad (4.25)$$

avec  $\mathcal{E}_{n,u}$  la variable aléatoire complexe représentant les valeurs prises dans la cavité par une composante cartésienne quelconque du champ propre  $\vec{\mathcal{E}}_n$  et suivant la même distribution que les composantes  $\Psi_{n,i}$  d'un vecteur propre d'une matrice  $H_{\text{eff}}$  GOE<sup>20</sup> vérifiant l'expression (3.47) :  $q_n^2 = (\sum_{i=1}^N \text{Im} [\Psi_{n,i}]^2) / (\sum_{i=1}^N \text{Re} [\Psi_{n,i}]^2)$ . Le paramètre de complexité étendu au champ vectoriel (4.23), la *phase rigidity* correspondante (4.19), de même que la distribution de l'intensité normalisée

$$\tilde{I}_{n,a} = |\mathcal{E}_{n,a}|^2 / \langle |\mathcal{E}_{n,a}|^2 \rangle_{\vec{r}} \quad (4.26)$$

19. Ce sont les mêmes hypothèses que celles faites dans le chapitre 2 pour les champs propres d'une CR chaotique sans perte.

20. On entend par  $H_{\text{eff}}$  GOE : un hamiltonien effectif dont la partie hermitienne est une matrice aléatoire GOE.

des composantes cartésiennes de  $\vec{\mathcal{E}}_n$ , doivent donc obéir aux mêmes lois de probabilités que leur équivalent scalaire. Ainsi, en supposant que la cavité est faiblement couplée à son environnement par  $M$  canaux de fuites identiques, et connaissant le recouvrement modal  $d$ , le paramètre de complexité normalisé  $x_n = q_n^2/d^2$  des champs propres  $\vec{\mathcal{E}}_n$  suit donc la loi  $p_{x;M}$  donnée par l'équation (3.52) :

$$p_{x;M}(x_n) = \frac{\pi^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4M^2 x_n}\right)^{-2 - \frac{M}{2}} \left(1 + \frac{(3+M)\pi^2}{4M^2 x_n}\right)}{24M x_n^2}$$

et évidemment la *phase rigidity* associée  $\rho_n$  (équation (4.20)) obéit à la loi  $p_{\rho;\{M,d\}}$  définie par l'équation (3.54)

$$p_{\rho;\{M,d\}}(|\rho|) = \frac{2}{d^2(1 + |\rho|)^2} p_{x;M} \left( \frac{(1 - |\rho|)}{d^2(1 + |\rho|)} \right).$$

Enfin, la distribution de l'intensité normalisée des composantes cartésiennes de  $\vec{\mathcal{E}}_n$ , vérifie les hypothèses de Pnini et Shapiro. Ainsi pour chaque champ propre,  $\tilde{I}_{n;a}$  suit la loi donnée par l'expression (3.49)

$$P(\tilde{I}; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\rho|^2}} \exp \left[ -\frac{\tilde{I}}{1 - |\rho|^2} \right] \text{I}_0 \left[ \frac{|\rho| \tilde{I}}{1 - |\rho|^2} \right]. \quad (4.27)$$

avec  $\rho = \rho_n$  donnés par l'équation (4.20). Tandis que pour un ensemble de champs propres vectoriels, la distribution d'intensité normalisée des composantes est donnée par la distribution

$$P_a(\tilde{I}_{n;a}) = \int_0^1 p_\rho(\rho) P(\tilde{I}_{n;a}; \rho) d\rho \quad (4.28)$$

avec  $p_\rho = p_{\rho;\{M,d\}}$  si la cavité est en régime de couplage faible.

### 4.3.3.2 Distribution de la norme des champs propres vectoriels d'une CR chaotique

On désignera par intensité normalisée, la quantité définie à partir de la norme des champs propres vectoriels par

$$\tilde{I}_n = \frac{||\vec{\mathcal{E}}_n||^2}{\left\langle ||\vec{\mathcal{E}}_n||^2 \right\rangle_{\vec{r}}}. \quad (4.29)$$

où  $||\vec{\mathcal{E}}_n||^2$  désigne le carré de la norme du vecteur  $\vec{\mathcal{E}}_n$ . La distribution d'intensité normalisée des champs propres d'une CR chaotique ne peut pas être directement prédite par la TMA, mais indirectement via les propriétés des composantes cartésiennes. En effet, le numérateur de (4.29), que l'on notera  $I$ , peut se mettre sous la forme<sup>21</sup> :

$$I = ||\vec{\mathcal{E}}||^2 = \text{Re} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right] \cdot \text{Re} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right] + \text{Im} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right] \cdot \text{Im} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right]. \quad (4.30)$$

Or, dans une CR chaotique, en raison de l'isotropie et de l'uniformité statistique du champ<sup>22</sup>,  $\text{Re} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right] \cdot \text{Re} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right]$  et  $\text{Im} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right] \cdot \text{Im} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right]$  sont deux variables aléatoires indépendantes, suivant des distributions  $\chi_3^2$ <sup>23</sup> dont le rapport des valeurs moyennes est fixé par le paramètre de complexité (4.23) adapté au problème vectoriel. Cette hypothèse statistique implique que, pour un champ propre donné,  $\tilde{I}_n$  obéit à la loi [140]

$$P_3(\tilde{I}; \rho) = \frac{9}{|\rho| \sqrt{1 - |\rho|^2}} \tilde{I} \exp \left( -\frac{3\tilde{I}}{1 - |\rho|^2} \right) \text{I}_1 \left( \frac{3\tilde{I}|\rho|}{1 - |\rho|^2} \right) \quad (4.31)$$

21. On omet ici les indices  $n$ .

22. Ces deux hypothèses permettent de trouver la distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes (4.27).

23. Une loi  $\chi_M^2$  équivaut à la somme des carrés de  $M$  variables aléatoires suivant une loi normale réduite centrée, a nécessairement une valeur moyenne égale à  $M$ . Les distributions suivies par  $\text{Re} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right] \cdot \text{Re} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right]$  et  $\text{Im} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right] \cdot \text{Im} \left[ \vec{\mathcal{E}} \right]$  sont en fait des distributions Gamma couramment notées  $\Gamma(k, \theta)$ . Ces distributions sont les distributions suivies par une variable aléatoire  $X$  somme des carrés de  $M$  variables aléatoires suivant la même loi normale centrée. Leur densité de probabilité est donnée par la fonction  $f(x, k, \theta) = x^{k-1} \exp(-x/\theta) \Gamma(k)^{-1} \theta^{-k}$  avec  $k = M/2$  et  $k\theta = \bar{X}$ . On utilise donc ici un abus de langage pour éviter toute confusion avec la notation  $\Gamma_n$  réservée aux largeurs.

avec  $I_1$  la fonction de Bessel modifiée de première espèce et  $\rho = \rho_n$ . Pour un ensemble de champs propres, la distribution d'intensité normalisée est donc donnée par la distribution

$$P(\tilde{I}_n) = \int_0^1 p_\rho(\rho) P_3(\tilde{I}_n; \rho) d\rho \quad (4.32)$$

avec  $p_\rho = p_{\rho; \{M, d\}}$  en régime de couplage faible. On remarquera que lorsque  $\rho$  tend vers 1,  $P_3 \rightarrow \chi_3^2$  (distribution attendue dans une CR chaotique sans perte) et lorsque  $\rho$  tend vers 0,  $P_3 \rightarrow \chi_6^2$  (distribution attendue dans une CR chaotique complètement ouverte ou lorsque les hypothèses de Hill sont valides).

#### 4.3.3.3 Vérification numérique

Afin de vérifier les prédictions précédentes, nous avons calculé par FEM les valeurs propres et champs propres pour 30 configurations (30 positions du brasseur) différentes de la CR montrée en Figure 4.3. Entre deux positions successives, le brasseur est tourné de 12 degrés, on calcule 50 résonances autour de 400 MHz, c'est-à-dire que l'on se place autour du 370<sup>e</sup> mode. Comme les zones de pertes sont toutes identiques, on peut supposer que les canaux de fuite associés sont tous identiquement couplés à la cavité. La première étape est de caractériser le régime de couplage de la CR. A cet effet, nous utilisons la distribution des largeurs comme quantité de test. On commence par évaluer, à partir des  $50 \times 30$  résonances complexes, le recouvrement modal (3.41)  $d = 0.58$ . Si on suppose que la CR est faiblement couplée à son environnement, le nombre de canaux de fuites est alors donné par la formule (3.59),

$$M = \frac{\langle \Gamma_n \rangle^2}{\text{Var}(\Gamma_n)} = 20 \quad (4.33)$$

et la force du couplage par (3.60)

$$\kappa = \frac{\pi d}{2M} = 0.046 \quad (4.34)$$

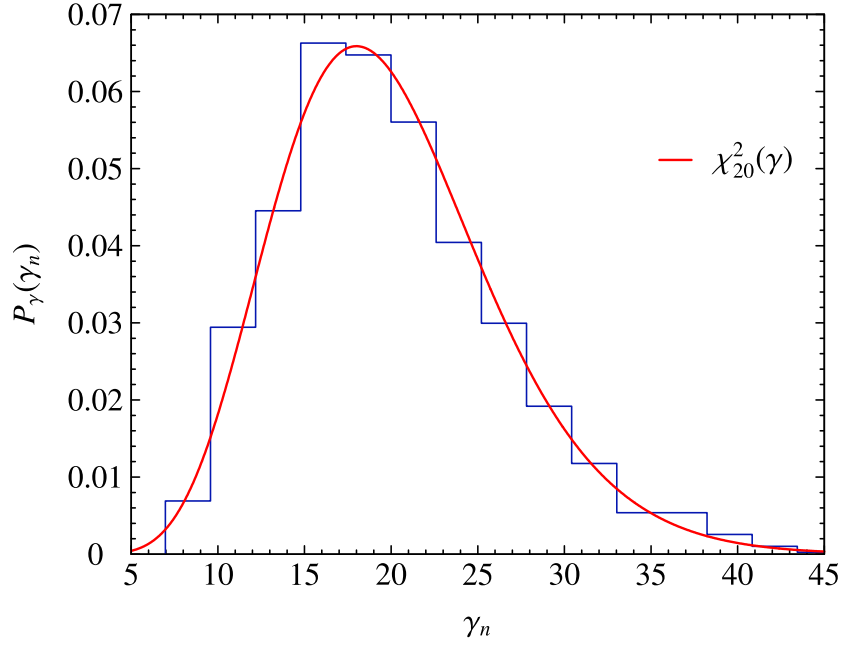


FIGURE 4.5 – **Distribution des largeurs réduites**  $\gamma_n$ . Le très bon accord entre l'histogramme et la loi  $\chi^2_M$  avec  $M = \langle \Gamma_n \rangle^2 / \text{Var}(\Gamma_n) = 20$ , montre que la CR est en régime de couplage faible

Connaissant  $\kappa$ , on peut calculer la distribution des largeurs réduites  $\gamma_n = \Gamma_n / \sigma^2$ , avec  $\sigma^2 = 2\kappa\Delta/\pi$ . Cette distribution (histogramme bleu dans la Figure 4.5) est comparée à la distribution  $\chi^2_M$  avec  $M = 20$  théoriquement attendue dans une cavité possédant 20 canaux de fuites faiblement couplés (courbe rouge). Le très bon accord entre l'histogramme et la courbe théorique indique clairement que la cavité est dans un régime de couplage faible. On peut alors comparer la distribution de la *phase rigidity*<sup>24</sup> des  $50 \times 30$  champs propres à la distribution analytique  $p_{\rho;\{M,d\}}$  (équation (3.54)) avec  $d = 0.58$  et  $M = \langle \Gamma_n \rangle^2 / \text{Var}(\Gamma_n) = 20$ . La Figure 4.6 montre un excellent accord entre la distribution empirique  $p_{\rho;e}$  (histogramme bleu) et la loi théorique  $p_{\rho;\{M,d\}}$  (courbe rouge). On s'intéresse maintenant à la distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes des  $50 \times 30$  champs propres  $\{\vec{\mathcal{E}}_n\}$ . La Figure 4.7 compare la distribution des  $\{\tilde{I}_{n;a}\}$  associée aux

24.  $\rho_n$  évaluée grâce à la définition (4.19). On peut aussi utiliser l'expression (4.20), à condition que les champs propres obtenus par FEM aient été normalisés par (4.14) au préalable.

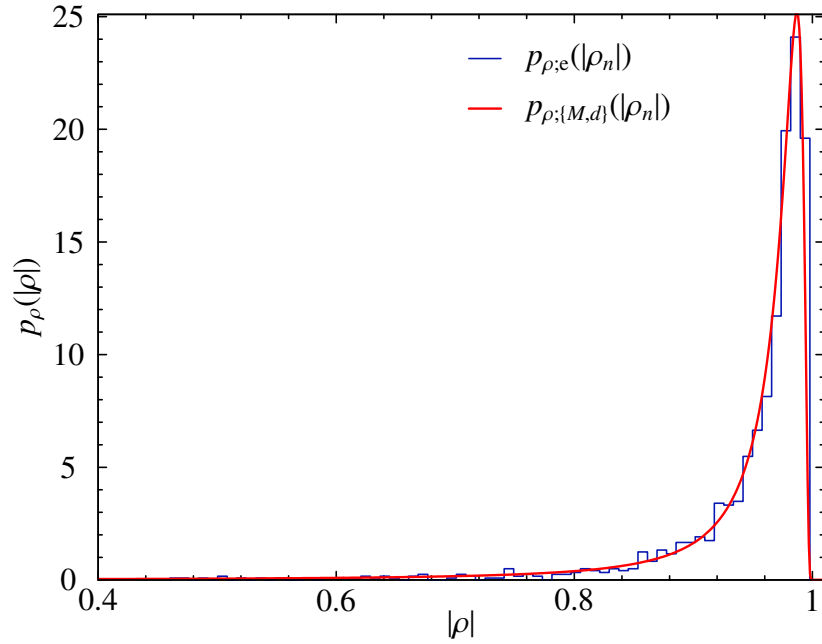


FIGURE 4.6 – **Distribution de la *phase rigidity* des champs propres vectoriels de la CR chaotique montrée dans la Figure 4.3.** Histogramme bleu : distribution empirique  $p_{\rho;e}(|\rho_n|)$  associée au  $50 \times 30$  champs propres vectoriels calculés par FEM. Courbe continue rouge : distribution théorique en couplage faible  $p_{\rho;\{M,d\}}$  avec  $d = 0.58$  et  $M = 20$  obtenue grâce aux statistiques des largeurs (4.33).

1500 champs propres (histogrammes noirs), à la prédiction  $P_a^{\{M,d\}}(\tilde{I}_{n;a})$  (courbes en rouge) obtenue en remplaçant dans (4.28)  $p_\rho$  par  $p_{\rho;\{M,d\}}$  avec  $d = 0.58$  et  $M = 20$  (courbe rouge de la Figure 4.6). Le graphique principal montre que, globalement, la prédiction TMA  $P_a^{\{M,d\}}(\tilde{I}_{n;a})$  décrit parfaitement la distribution des  $\{\tilde{I}_{n;a}\}$ . Le tracé en échelle semi-log présenté en insert, montre que l'accord est toujours bon sur près de deux décades. Cependant, pour les valeurs élevées,  $\tilde{I}_{n;a} \geq 6$ , on observe un écart non-négligeable entre la distribution empirique et la prédiction TMA. Cet écart doit être analysé comme la conséquence de la présence de champs propres non-génériques<sup>25</sup> parmi l'ensemble des 1500 champs propres. Lorsque la distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un mode complexe donné suit la loi (4.27), c'est-à-dire que le mode est ergodique, la variance de

25. C'est-à-dire dont les composantes cartésiennes n'obéissent pas à la loi (4.27).

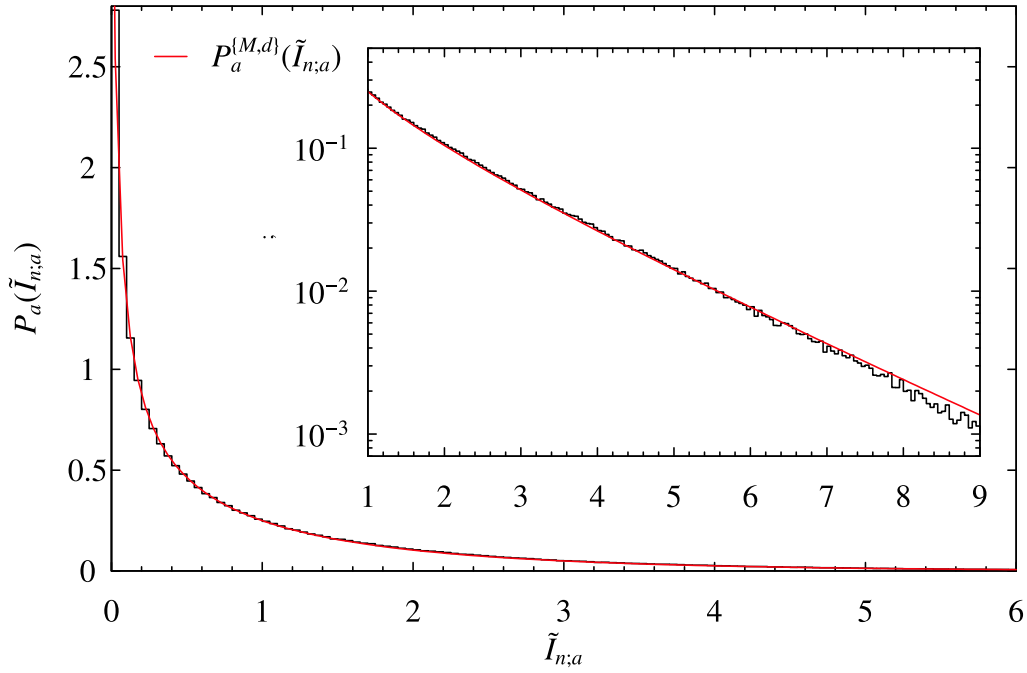


FIGURE 4.7 – Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de champs propres.

$\tilde{I}_{n;a}$  est alors entièrement déterminée par la valeur de la *phase rigidity* par la relation

$$\text{Var}(\tilde{I}_{n;a}) = 1 + |\rho_n|^2 \quad (4.35)$$

On peut donc supposer qu'un champ propre dont les composantes cartésiennes ne vérifient pas

$$1 \leq \text{Var}(\tilde{I}_{n;a}) \leq 2 \quad (4.36)$$

n'est pas statistiquement uniforme et isotrope. Nous testons cette hypothèse en conservant, sur les 1500 champs propres calculés, uniquement ceux vérifiant la relation (4.36). En imposant cette contrainte, on élimine environ 8% des modes complexes, principalement au début de la gamme spectrale. On compare ensuite la distribution des intensités normalisées  $\{\tilde{I}_{n;a}\}$  de cet ensemble réduit (histogrammes noirs dans la Figure 4.8) à la prédiction  $P_a^{(M,d)}(\tilde{I}_n)$  calculée en remplaçant dans (4.28)  $p_\rho$  par  $p_{\rho;\{M,d\}}$  avec  $d = 0.58$  et



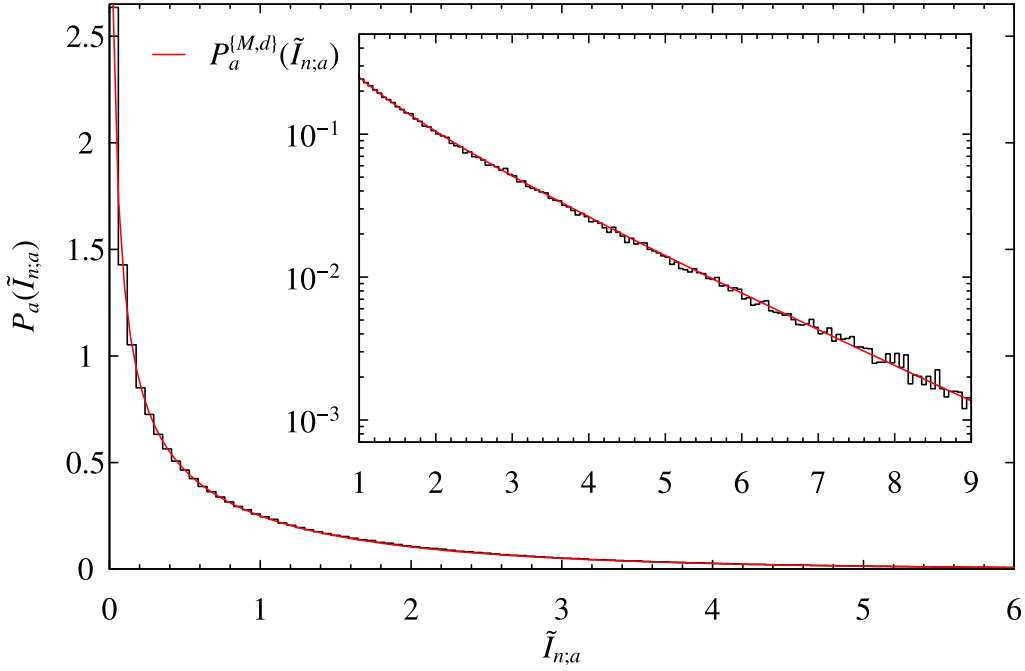


FIGURE 4.8 – Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de champs propres après retrait des modes non génériques

$M = 20$  (courbes rouges). La Figure 4.8 met clairement en évidence la validité de notre hypothèse, puisque, sur cet échantillon réduit, la prédiction  $P_a^{\{M,d\}}(\tilde{I}_{n;a})$  décrit parfaitement la distribution empirique des  $\{\tilde{I}_{n;a}\}$  aussi bien pour les valeurs les plus probables (graphique principale) que sur la queue de la distribution (courbes en insert). Nous noterons tout de même que sur les 8% de modes complexes exclus, tous n'étaient pas des modes non génériques. Certains modes ergodiques n'ont en effet pas passé le test (4.35), en raison des fluctuations statistiques liées à l'évaluation des distributions sur un nombre fini de points dans la CR. Pour information, on compare aussi la distribution des intensités normalisées  $\left\{ \tilde{I}_n = \|\vec{\mathcal{E}}_n\|^2 / \left\langle \|\vec{\mathcal{E}}_n\|^2 \right\rangle \right\}$  de cet ensemble réduit (histogrammes noirs Figure 4.9), à la prédiction  $P^{\{M,d\}}(\tilde{I}_n)$  calculée en remplaçant dans (4.32)  $p_\rho$  par  $p_{\rho;\{M,d\}}$  avec  $d = 0.58$  et  $M = 20$  (courbes rouges). L'excellent accord entre l'histogramme et la distribution théorique, prouve la validité de la distribution  $P_3(\tilde{I}; \rho)$  (équation (4.31)) pour décrire la distribution spatiale du module carré de la norme d'un champ vectoriel dans

une CR chaotique. Nous terminerons notre étude des champs propres de la CR chaotique

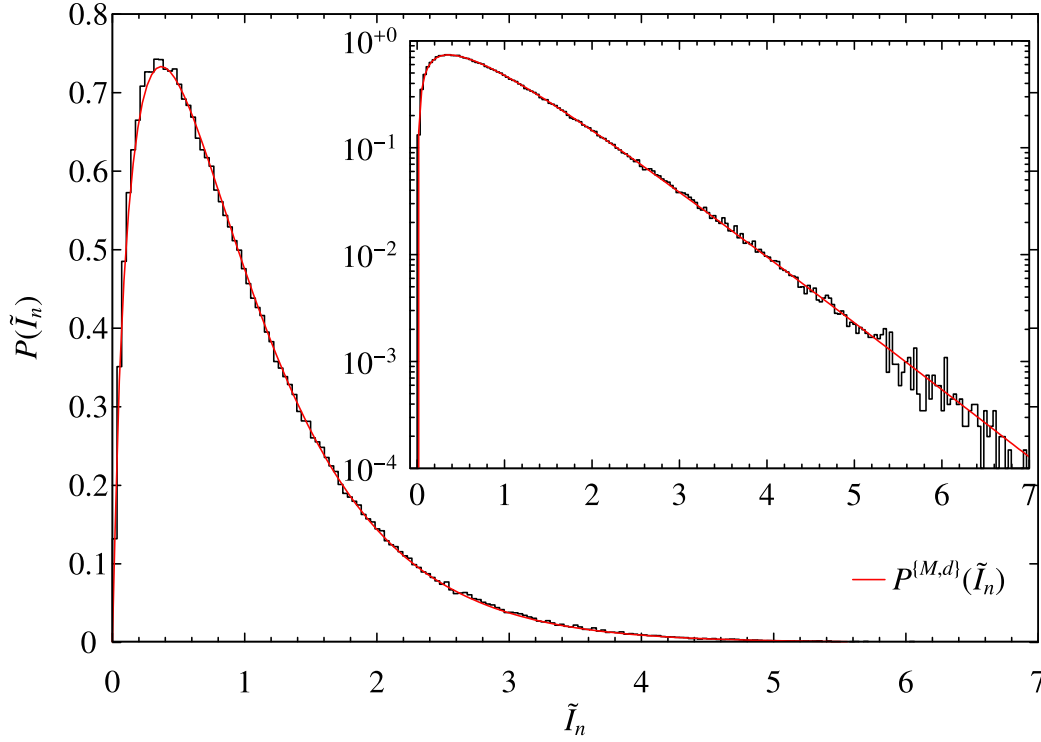


FIGURE 4.9 – **Distribution d'intensité normalisée**  $\tilde{I}_n = \|\vec{\mathcal{E}}_n\|^2 / \langle \|\vec{\mathcal{E}}_n\|^2 \rangle$  d'un ensemble de champs propres après retrait des modes non génériques

en remarquant que, bien que la distribution de  $\rho_n$  soit très piquée au voisinage de  $\rho = 1$  (Figure 4.6), la distribution d'intensité des composantes cartésiennes (Figure 4.8) et celle de la norme des champs propres (Figure 4.9) sont respectivement différentes de la distribution de Porter-Thomas et de la loi  $\chi_3^2$  attendues dans les systèmes sans pertes. Cette différence est illustrée sur la Figure 4.10, présentant l'écart relatif de ces deux distributions par rapport aux prédictions  $P_a^{\{M,d\}}$  et  $P^{\{M,d\}}$ .

L'ensemble des résultats présentés dans cette section a montré que la TMA appliquée à  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  permet de faire des prédictions parfaitement vérifiées par les champs propres vectoriels d'une CR chaotique. Dans la section suivante, nous allons montrer que les prédictions de la TMA sur les statistiques spatiales de la réponse d'un système chaotique ouvert sont

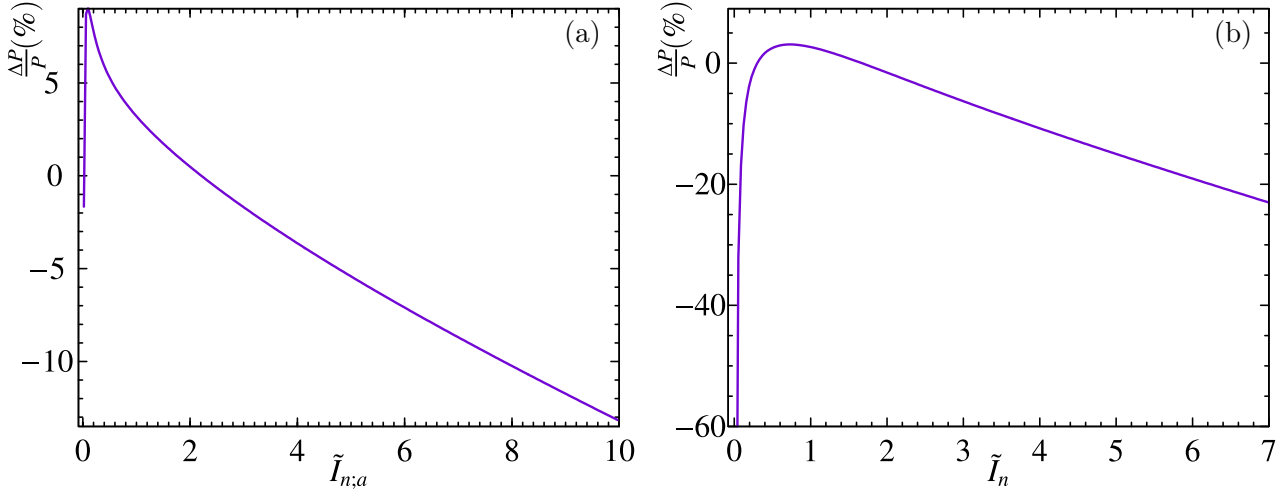


FIGURE 4.10 – **Écarts relatifs aux distributions attendues dans un système fermé.** (a) écart relatif de la distribution de Porter-Thomas à  $P_a^{\{M,d\}}$  avec  $d = 0.58$  et  $M = 20$  (Figure 4.7). (b) écart relatif de la distribution  $\chi_3^2$  à  $P^{\{M,d\}}$  avec  $d = 0.58$  et  $M = 20$  (Figure 4.8).

elles aussi vérifiées dans une CR chaotique.

## 4.4 Statistiques spatiales universelles de la réponse électromagnétique d'une CR chaotique

Nous commencerons par rappeler les principaux résultats du chapitre 3 concernant le comportement universel de la réponse d'un système chaotique ouvert et les propriétés que l'on peut donc attendre de la réponse électromagnétique d'une CR chaotique. La réponse d'un système chaotique ouvert vérifie, à l'instar des champs propres, les hypothèses de Pnini et Shapiro.<sup>26</sup> Donc, dans une CR chaotique, pour une fréquence d'excitation et une configuration (position du brasseur, polarisation et position des sources) donnée, la distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes  $\tilde{I}_a = |E_a|^2 / \langle |E_a|^2 \rangle_{\vec{r}}$  de la réponse  $\vec{E}$  et la distribution d'intensité normalisée de la réponses  $\tilde{I} = ||\vec{E}||^2 / \langle ||\vec{E}||^2 \rangle_{\vec{r}}$

26. Définissant les propriétés statistiques d'une champ statistiquement uniforme et isotrope d'un système ouvert.

doivent obéir respectivement aux lois (4.27) et (4.31)

$$\begin{cases} P(\tilde{I}_a; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-|\rho|^2}} \exp \left[ -\frac{\tilde{I}_a}{1-|\rho|^2} \right] I_0 \left[ \frac{|\rho| \tilde{I}_a}{1-|\rho|^2} \right] \\ P_3(\tilde{I}; \rho) = \frac{9}{|\rho| \sqrt{1-|\rho|^2}} \tilde{I} \exp \left( -\frac{3\tilde{I}}{1-|\rho|^2} \right) I_1 \left( \frac{3\tilde{I}|\rho|}{1-|\rho|^2} \right) \end{cases} \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

avec (équation (4.19)). Les distributions d'intensité normalisée d'un ensemble de réponses ( $\{\tilde{I}_a\}$  et  $\{\tilde{I}\}$ ), obtenues pour des fréquences et/ou des configurations différentes, sont données par les lois (4.28) et (4.32)

$$\begin{cases} P_a(\tilde{I}_a) = \int_0^1 P_\rho(\rho) P(\tilde{I}_a; \rho) d\rho \\ P(\tilde{I}) = \int_0^1 P_\rho(\rho) P_3(\tilde{I}; \rho) d\rho \end{cases} \quad (4.39)$$

$$(4.40)$$

où  $P_\rho$  est la distribution de la *phase rigidity* des réponses. Celle-ci étant différente de  $p_\rho$  nous ne connaissons pas de forme analytique pour  $P_\rho$ . Néanmoins  $P_a(\tilde{I}_a)$  et  $P(\tilde{I})$  peuvent être évaluées à partir de la distribution empirique (l'histogramme)  $P_{\rho,e}$  comme décrit par l'expression (3.55). Nous noterons les distributions ainsi calculées  $P_a^e(\tilde{I}_a)$  et  $P^e(\tilde{I})$ . On remarquera que dans le contexte des CRBM, où il est demandé aux champs d'être statistiquement uniformes et isotropes grâce au brassage, ce sont les distributions (4.39) et (4.40), résultant d'une intégrale sur les configurations, qui sont les plus pertinentes pour décrire statistiquement le champ dans la CR.

#### 4.4.1 Statistique des éléments du TGD

Afin de réaliser notre étude statistique, nous considérons 30 configurations géométriques différentes de la CR montrée dans la Figure 4.3, obtenues en pivotant le brasseur autour de son axe par pas de 12 degrés. Pour chacune des positions du brasseur, le TGD

(4.12) est calculé pour 300 fréquences d'excitation régulièrement espacées entre 391 MHz et 406 MHz<sup>27</sup>, 1 position unique de source et 64 points de mesures distants des parois de la CR d'au moins  $\lambda/4$ . Les champs propres et valeurs propres intervenant numériquement dans les TGD calculés correspondent à ceux étudiés dans la section précédente. Chacune des colonnes du TGD correspondant à la réponse à une excitation polarisée dans des directions différentes, on obtient au final un ensemble de  $30 \times 300 \times 3$  réponses  $\vec{E}$  (4.10) mesurées en 64 points de la CR<sup>28</sup>. On compare dans la Figure 4.11 la distribution des  $\{\tilde{I}_a\}$  (histogramme noir) associée à l'ensemble des réponses avec la prédiction  $P_a^e$  (4.39) (courbes rouges) obtenue à partir de la distribution empirique  $P_{\rho,e}$  de la *phase rigidity*. La distribution  $P_a^e$  décrit parfaitement la distribution d'intensité des composantes cartésiennes pour les valeurs les plus probables (graphique principal) et sur près de deux décades (graphique en insert). Néanmoins, le tracé en échelle semi-logarithmique fait apparaître une déviation non négligeable de l'histogramme par rapport à la prédiction  $P_a^e$ . Cette déviation sur la queue de la distribution apparaissant pour des intensités normalisées  $\tilde{I}_a \geq 6$  peut être reliée, comme dans la section précédente, à la présence de réponses dont le champ n'est ni uniforme ni isotrope. Par analogie avec les modes non génériques, on désignera ces réponses sous le terme de *réponses non génériques*. En restreignant l'ensemble des réponses étudiées aux seules réponses vérifiant la critère (4.36) :  $\text{Var}(\tilde{I}_a) \in [1, 2]$ , on peut supprimer les réponses non génériques de notre échantillon statistique.

27. Cet intervalle correspond à des fréquences comprise entre  $7f_c$  et  $7.3f_c$ , où  $f_c$  est la fréquence de coupure de l'une des configurations géométrique de la CR.

28. Les moyennes spatiales  $\langle \cdots \rangle_{\vec{r}}$  seront donc réalisées sur ces 64 points.

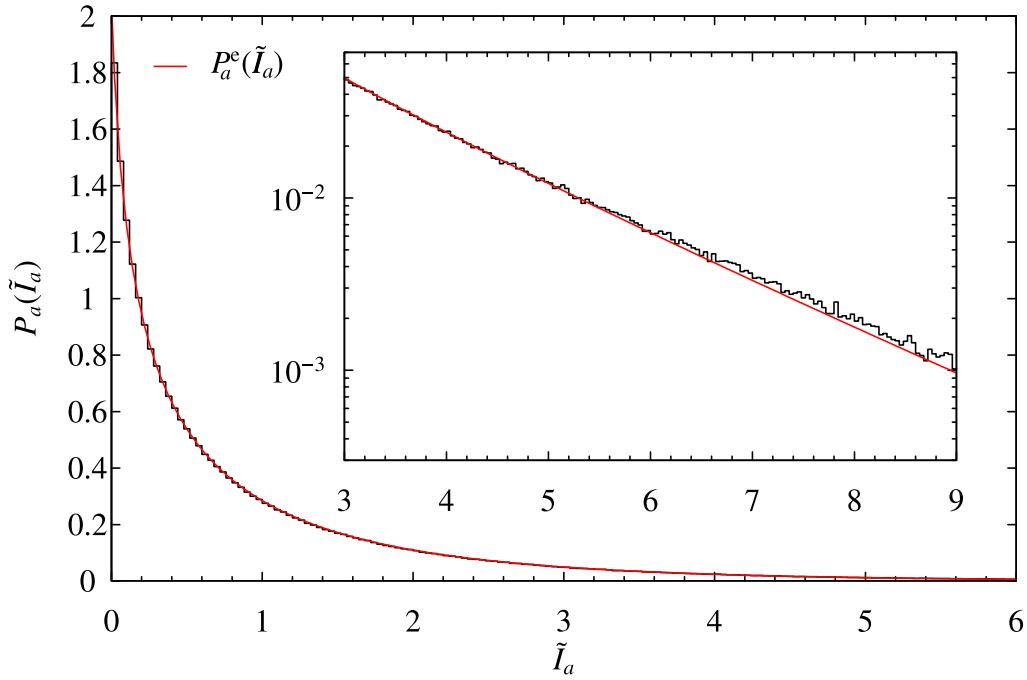


FIGURE 4.11 – Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de  $30 \times 300 \times 3$  réponses calculées dans la CR chaotique Figure 4.3.

En effet comme le montre la Figure 4.12, la distribution des  $\{\tilde{I}_a\}$  (histogrammes noirs) associée à cet ensemble réduit de 10% est parfaitement en accord, sur près de 3 décades, avec la prédiction  $P_a^e$  (courbes en bleu) dans laquelle la distribution empirique  $P_{\rho;e}$  utilisée est celle associée à l'échantillon réduit. La majorité des réponses supprimées sont associées à des fréquences d'excitation au bas de l'intervalle fréquentiel étudié. Compte tenu du fait que le recouvrement modal est modéré ( $d = 0.58$ ), trouver des réponses non génériques dans le bas de l'intervalle d'étude est cohérent avec les résultats obtenus dans la section précédente, où l'on avait pu observer que les champs propres non génériques étaient associés aux fréquences de résonance les plus basses de l'échantillon étudié. La Figure 4.13 montre la distribution du module de  $\vec{E}$  à l'intérieur de la CR pour l'une des réponses non génériques, détectée grâce au critère (4.36). Enfin on notera qu'en raison des fluctuations statistiques liées à l'évaluation des distributions sur un nombre restreint de points, quelques réponses générique n'ont pas vérifié (4.36) et ont donc aussi été écartées.

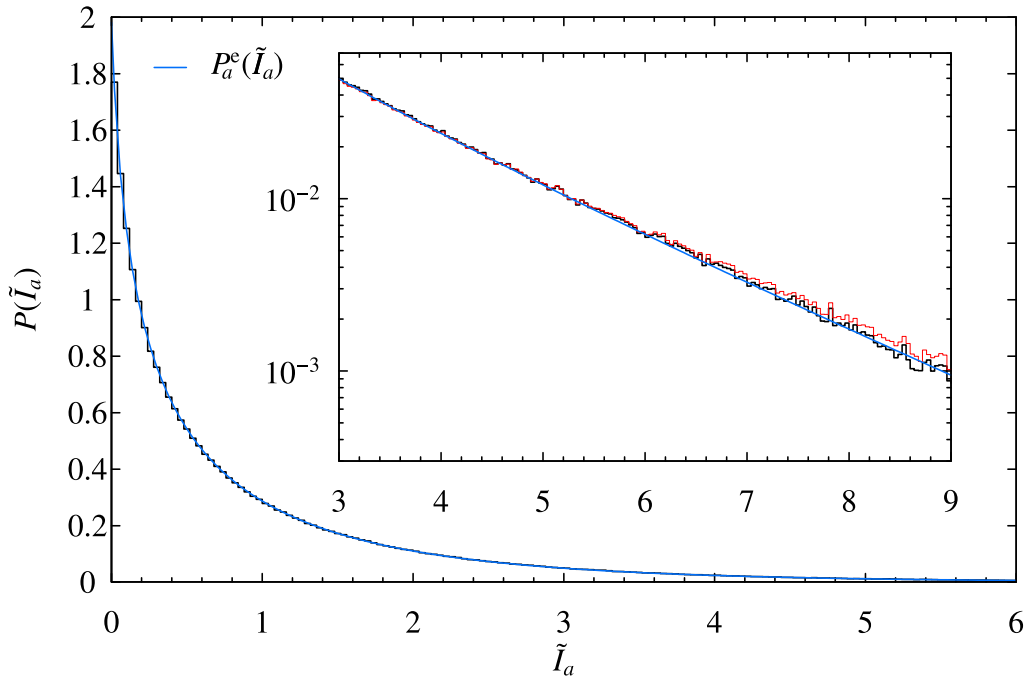


FIGURE 4.12 – **Distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de réponses après retrait des réponses non statistiquement uniformes ni isotropes.** Histogramme noir : distribution construite à partir de l'échantillon réduit de 10%. Courbe bleu : distribution théorique  $P_a^e$  (4.39). Pour comparer ces résultats à ceux présentés dans la Figure 4.11, on a représenté en rouge, dans le graphique en insert, la distribution des  $\{\tilde{I}_a\}$  associée à l'échantillon complet.

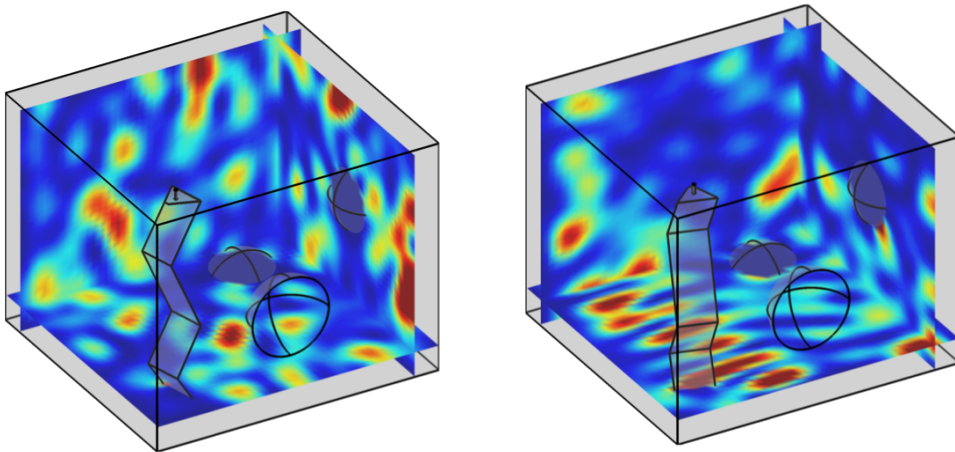


FIGURE 4.13 – **Distribution spatiale de la réponses dans la CR chaotique.** Les deux images représentent la distribution du module de  $\vec{E}$  dans la CR pour la même fréquence d'excitation  $f = 391.3\text{MHz}$  mais deux positions différentes du brasseur. Image de gauche : Une réponse générique typique d'une CR chaotique. Image de droite : une réponse non générique détectée grâce au critère (4.36). On remarquera pour la réponse non générique que le champ est localement structuré entre deux murs parallèles.

### 4.4.2 Prédire la distribution d'un ensemble de réponses d'une CR chaotique : le recouvrement modal comme seul paramètre

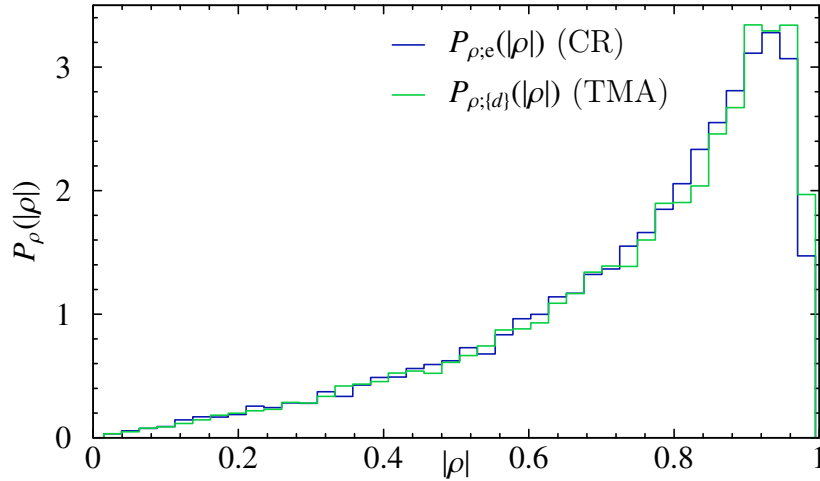


FIGURE 4.14 – Prédiction TMA de la distribution de la *phase rigidity* des réponses de la CR chaotique 4.3.

À partir de simulations de réponses TMA construites avec les vecteurs propres de matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$  de dimension  $N$ , nous avons pu observer que, quel que soit le nombre de canaux  $M < N$  choisi, si la valeur du couplage est fixée à  $\kappa = \pi d/2M$ , alors la distribution  $P_\rho$  de la *phase rigidity* de la réponse reste inchangée. Le  $P_\rho$  semble donc dépendre d'un unique paramètre : le recouvrement modal  $d$ . Nous avons testé cette hypothèse pour des recouvrements modaux modérés allant de  $d = 0.16$  à  $d = 1$ . Dans la Figure 4.14, l'histogramme bleu  $P_{\rho;e}$  correspond à la distribution empirique de la *phase rigidity* entrant dans le calcul du  $P_a^e$  montré dans la Figure 4.12 (courbes bleu), tandis que l'histogramme vert  $P_{\rho;\{d\}}$ <sup>29</sup> correspond à la distribution empirique de la *phase rigidity* d'un ensemble de 30000 réponses, construites avec les vecteurs propres de 100 matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$  de dimension  $N = 100$ . Dans les simulations TMA, on a fixé le couplage à  $\kappa = \pi d/2M$  avec  $d = 0.58$  le recouvrement modal dans la CR et choisi arbitrairement  $M = 10$ . Les deux distributions

29. Dans la suite du manuscrit, on conservera la notation  $P_{\rho;\{d\}}$  pour indiquer une distribution empirique de  $\rho$  obtenue par des simulations de réponses TMA avec  $M$  quelconque et le couplage fixé à  $\kappa = \pi d/2M$ .



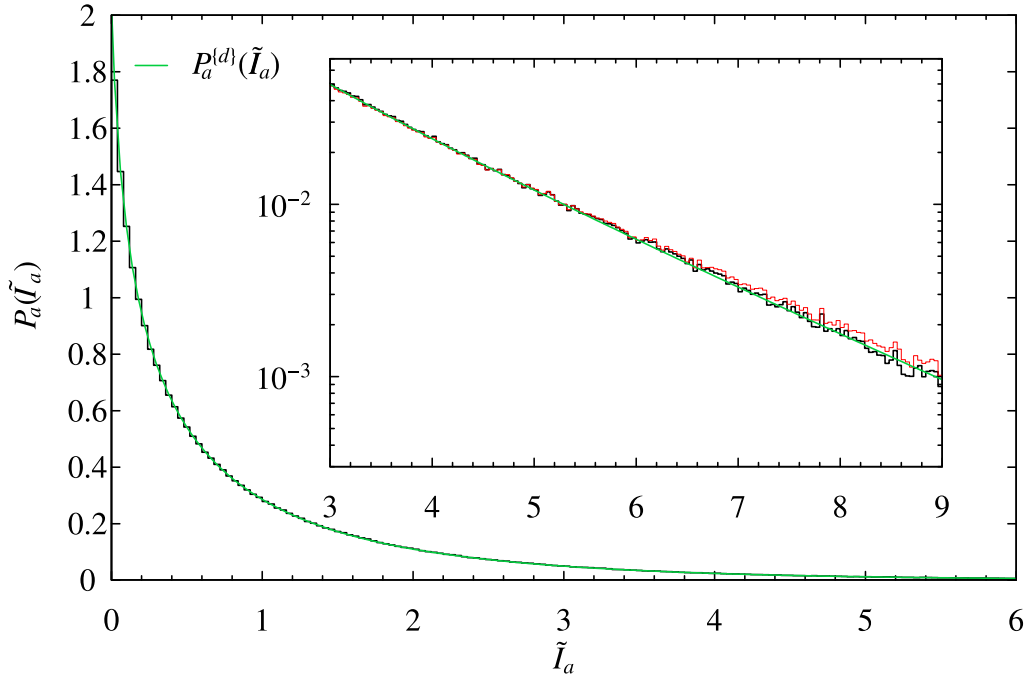


FIGURE 4.15 – **Prédiction TMA de la distribution d'intensité normalisée des composantes cartésiennes d'un ensemble de réponses.** Histogrammes noir : distributions construite à partir d'un échantillon sans réponses non génériques. Histogramme rouge : distributions construite à partir de l'échantillon complet. Courbe vertes : distribution théorique  $P_a$  (4.39) obtenue en remplaçant  $P_\rho$  par  $P_{\rho;\{d\}}$  (histogramme vert de la Figure 4.14).

sont équivalentes. Il est donc possible de prédire, par des simulations de réponse TMA, la distribution de la *phase rigidity*  $P_{\rho;e}$  d'une cavité chaotique, dont on connaît seulement le recouvrement modal. En conséquence, les distributions d'intensités normalisées  $P_a(\tilde{I}_a)$  (4.39) et  $P(\tilde{I})$  (4.40) d'une CR chaotique doivent dépendre uniquement de  $d$ . Commençons par vérifier cette hypothèse en comparant la distribution des  $\{\tilde{I}_a\}$  déjà montrée dans la Figure 4.12<sup>30</sup> et reportée dans la Figure 4.12 (histogramme noirs) avec la distribution  $P_a^{\{d\}}(\tilde{I}_a)$  (courbes en vert), obtenue en remplaçant dans (4.39)  $P_\rho$  par  $P_{\rho;\{d\}}$  (histogramme vert de la Figure 4.14). La distribution  $P_a^{\{d\}}(\tilde{I}_a)$  décrit parfaitement la distribution d'intensité des composantes cartésiennes des réponses électromagnétiques de la CR chaotique. On complète notre étude en comparant la distribution des  $\{\tilde{I} = \|\vec{E}\|^2 / \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle_{\vec{r}}\}$  de la

30. Les réponses non génériques ont été enlevées de l'ensemble statistique

CR chaotique (histogramme noir de la Figure 4.16) avec la prédiction notée  $P^{\{d\}}$  (courbe verte), estimée en remplaçant dans (4.40)  $P_\rho$  par  $P_{\rho;\{d\}}$ <sup>31</sup> avec  $d = 0.58$ . L'accord est encore une fois excellent. Dans cette même figure, on compare également la distribution des  $\{\tilde{I} = \|\vec{E}\|^2 / \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle_{\vec{r}}\}$  de la CR chaotique aux distributions attendues dans un système fermé ( $\chi_3^2$ , courbe violette continue) et dans un système complètement ouvert ( $\chi_6^2$ , tirets violets). La dernière distribution correspond aussi à la distribution attendue dans une CR qui vérifierait les hypothèses de Hill. Aucune des deux distributions ne peut décrire le comportement statistique du champ dans la CR.

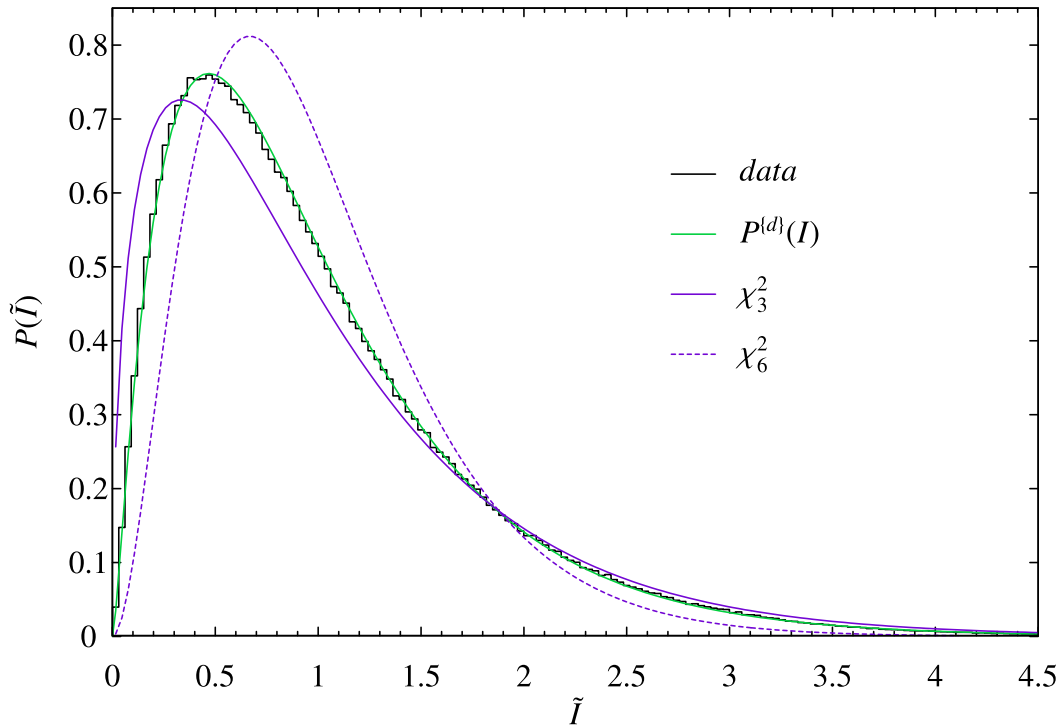


FIGURE 4.16 – Comparaison de la distribution d'intensité des réponses de la CR chaotique (Figure 4.3) avec la prédiction TMA  $P^{\{d\}}$  et les distribution attendues dans un système complètement fermé ( $\chi_3^2$ ), et dans un système complètement ouvert ( $\chi_6^2$ )

31. Pour cette figure, la distribution  $P_{\rho;\{d\}}$  est estimée à partir de 5000 réponses associées à 50 matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$  de dimension  $N = 100$ , avec  $M = 30$

### 4.4.3 Distribution de la réponse dans une CR chaotique expérimentale

Dans ce paragraphe, on propose d'étudier la distribution d'intensité de la réponse de la CR expérimentale rendue chaotique (Figure 4.1), à partir de mesures de transmission  $S_{12}$  entre l'antenne dipôle fixe (on lui attribue l'indice 1) et l'antenne monopôle (on lui attribue l'indice 2) placée sur le trépied. La matrice  $S$  est mesurée pour 1024 fréquences dans l'intervalle [309 MHz, 410 MHz,] et pour 8 positions différentes de l'antenne monopôle dans la CR. Pour chaque position de l'antenne, on réalise 30 mesures correspondant chacune à une position différente du brasseur. Les positions successives du brasseur sont espacées de 12 degrés. On rappelle que dans l'intervalle fréquentiel de notre étude, le recouvrement modal a été estimé à  $d = 0.89$ . Si on suppose que les deux antennes sont assimilables à deux dipôles physiques quasi-ponctuels, positionnées en  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  et respectivement polarisées selon  $\hat{n}_b$  et  $\hat{n}_a$ , pour une excitation de fréquence  $f$  et une position  $\theta$  du brasseur, l'élément de matrice  $S_{12;\theta}$  peut alors s'écrire :

$$S_{12;\theta}(f) = (\kappa_2 \hat{n}_a) \cdot \overline{\overline{G}}_\theta(\vec{r}_2, \vec{r}_1, f) \cdot (\kappa_1 \hat{n}_b) \quad (4.41)$$

avec  $\kappa_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) le couplage de l'antenne  $i$  et  $\overline{\overline{G}}_\theta$  le TGD de la CR pour la configuration  $\theta$  du brasseur. Pour chaque fréquence, nous estimons la valeur des couplages grâce à la relation [134]

$$\kappa_i^2 = \frac{|1 - \langle S_{ii;\theta} \rangle_\theta|^2}{1 - |\langle S_{ii;\theta} \rangle_\theta|^2} \quad (4.42)$$

où  $\langle \cdot \cdot \cdot \rangle_\theta$  désigne la moyenne sur les positions du brasseur. Notons  $\vec{E}_\theta(\vec{r}_2, f)$ , la réponse de la CR à l'excitation polarisée selon  $\hat{n}_b$  provoquée par l'antenne 1 et mesurée en  $\vec{r}_2$ .  $S_{12;\theta}(f)$  est lié à la projection de  $\vec{E}_\theta(\vec{r}_2, f)$  dans la direction  $\hat{n}_a$  de polarisation de l'antenne 2 par la relation :

$$\vec{E}_\theta(\vec{r}_2, f) \cdot \hat{n}_a = \frac{S_{12;\theta}(f)}{\kappa_1 \kappa_2}. \quad (4.43)$$

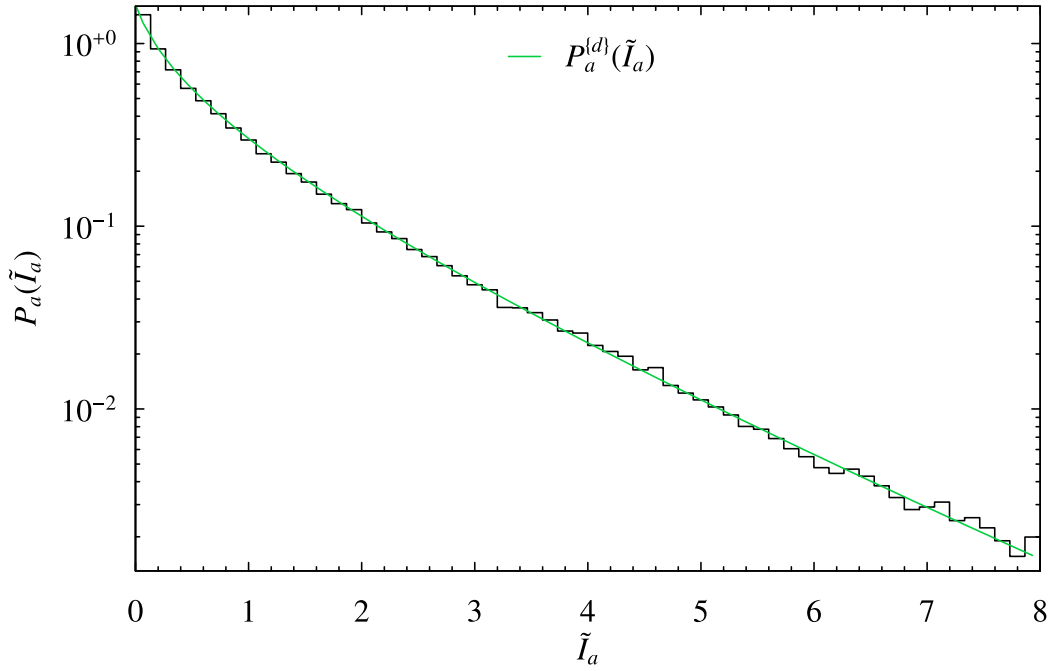


FIGURE 4.17 – **Distribution d'intensité normalisée d'un ensemble de réponses mesurées dans la CR expérimentale chaotique.** Histogramme noir : distribution des  $\tilde{I}_a$  définis par (4.44). Courbe verte : Distribution théorique  $P_a^{(d)}$  (4.39) calculée par TMA en fixant  $d = 0.89$ .

Pour simplifier les notations on pose  $\vec{E}_\theta(\vec{r}_2, f) \cdot \hat{n}_a = E_{\theta;a}(\vec{r}_2, f)$ . Le champ dans une CR chaotique étant supposé statistiquement isotrope, étudier la distribution de  $E_{\theta;2}$  est alors équivalent à étudier celle des composantes cartésiennes de la réponse  $\vec{E}_\theta(\vec{r}_2, f)$ . Dans ce paragraphe, on définit l'intensité normalisée (des composantes) par

$$\tilde{I}_a(\vec{r}_2, \theta, f) = \frac{|E_{\theta;a}(\vec{r}_2, f)|^2}{\langle |E_{\theta;a}(\vec{r}_2, f)|^2 \rangle_{\vec{r}_2, \theta}} \cong \tilde{I}_a \quad (4.44)$$

où  $\langle \cdots \rangle_{\vec{r}_2, \theta}$  est la moyenne sur les 8 positions d'antennes et les 30 positions de brasseurs<sup>32</sup>.

On remarquera que, pour une fréquence donnée, si on se place dans le contexte d'une CRBM utilisée pour les tests de CEM, la distribution de  $\tilde{I}_a$  rend compte de la distribution

32. On complète la moyenne spatiale par une moyenne sur les configurations de la CR afin de réduire l'incertitude statistique, engendrée par le faible nombre de positions de mesure, sur l'évaluation de l'intensité moyenne. Cette approche n'est justifiée qu'en raison des propriétés d'ergodicité attendues dans un système chaotique.

du champ vu par un objet sous test lors d'un brassage mécanique. Sur la Figure 4.17, on compare la distribution de l'ensemble des  $\tilde{I}_a$  mesurées, avec la distribution théorique  $P_a^{\{d\}}$  (4.39) (courbe verte) estimée par TMA<sup>33</sup> en fixant  $d = 0.89$  ; cette valeur du recouvrement modal étant estimée par HI. L'accord entre la courbe théorique et la distribution empirique expérimentale est remarquablement bon.

À la différence de notre modèle numérique, bien que les canaux de fuites de la CR chaotique expérimentale soient relativement faiblement couplés<sup>34</sup>, ils ne sont pas, pour autant, identiquement couplés, ni associés à un unique mécanisme de pertes. Néanmoins le régime de recouvrement modal reste modéré ( $d \lesssim 1$ ) aussi bien dans le modèle numérique que dans la CR expérimentale. Ainsi, le résultat expérimental présenté dans la Figure 4.17, confirme que, dans ce régime  $d \lesssim 1$ , la valeur du recouvrement modal est l'unique paramètre dont dépendent les statistiques spatiales de la réponse d'une CR chaotique.

## 4.5 Une CR commerciale et sa version chaotique : des comportements très différents

Dans cette section, nous allons montrer et analyser, numériquement et expérimentalement, les différences de comportement statistique entre une CR conventionnelle et cette même CR rendue chaotique. Les CR conventionnelles étudiées correspondent simplement aux CR numérique (Figure 4.3) et expérimentale (Figure 4.1) sans aucun hémisphère. Dans les deux CR numériques (la CR chaotique et la CR conventionnelle), les patches absorbants sont identiques, placés aux mêmes endroits, et leur conductivité est ajustée de telle sorte que le recouvrement modale autour de 400 MHz soit proche de celui mesuré

33. On entend par *estimer par TMA*, le fait de remplacer dans (4.39)  $P_\rho$  par la distribution empirique  $P_{\rho;\{d\}}$ , obtenue en calculant un nombre suffisant de réponses TMA associées à des matrices aléatoires  $H_{\text{eff}}$  pour lesquelles le nombre de canaux  $M$  est choisie arbitrairement et le couplage fixé à  $\kappa = \pi d/2M$ . Par exemple pour la Figure 4.17.,  $P_{\rho;\{d\}}$  est estimée grâce à 5000 réponses TMA associée à 50 matrices  $H_{\text{eff}}$  de taille  $N = 100$ , avec  $M = 10$  et  $d = 0.89$

34. Voir le début de ce chapitre et les conclusions sur l'analyse de la NNSD expérimentale Figure 4.2.

par  $HI$  dans le CR expérimentale ; c'est-à-dire  $d \sim 0.8$ . Les expériences et simulations sont réalisées dans les mêmes conditions que celles décrites au début de ce chapitre.

### 4.5.1 Distribution d'intensité des composantes de la réponses

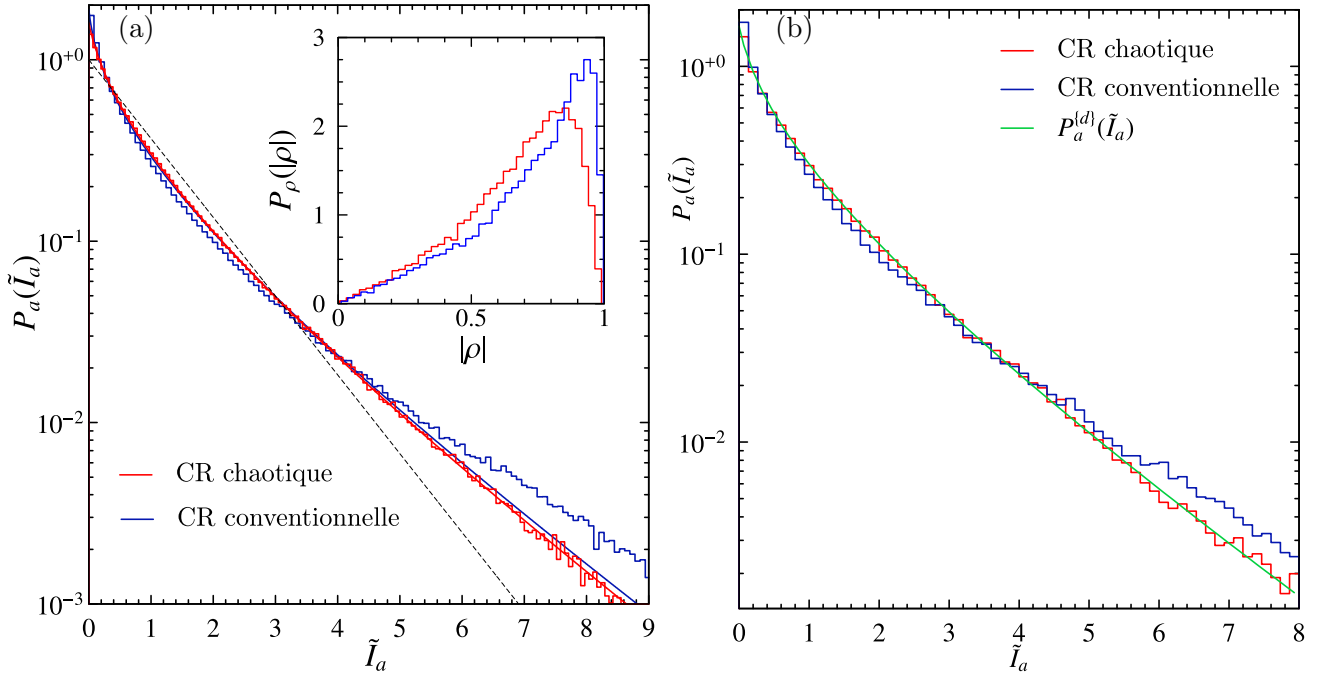


FIGURE 4.18 – **Comparaison des distributions d'intensité normalisée des composantes du champ électrique entre CR conventionnelle et CR chaotique.** (a) Résultats numériques. (b) Résultats expérimentaux. Pour l'ensemble de la figure les résultats associés aux CR chaotiques sont représentés en rouge et ceux associés aux CR conventionnelles en bleu. Les courbes continues rouges et bleues correspondent respectivement aux prédictions théoriques  $P_a(\tilde{I}_a)$  (4.39) dans lesquelles  $P_\rho$  est remplacé par les distributions empiriques de même couleur montrées en insert. La courbe continue verte dans (b) montre la distribution théorique  $P_a^{(d)}$  estimée par TMA en fixant  $d = 0.89$ . Dans (a) les tirets noirs correspondent aux hypothèses de Hill

On compare ici la prédiction théorique  $P_a(\tilde{I}_a)$  (4.39) avec les distributions d'intensité normalisées  $\tilde{I}_a$  des composantes des réponses obtenues dans les CR numériques (Figure 4.18a), soit en calculant le TGD (4.12), ou déduites, dans les CR expérimentales (Figure 4.18b), des mesures de transmission  $S_{12}$  (4.43). Pour les résultats numériques (Figure 4.18a), les histogrammes associés à la CR chaotique (rouge) et conventionnelle (bleu)

sont respectivement comparés à la distribution  $P_a(\tilde{I}_a)$  (courbes continues rouge et bleu) (4.39) dans laquelle on remplace  $P_\rho$  par la distribution empirique de la *phase rigidity*  $\rho = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle_{\vec{r}} / \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle_{\vec{r}}$  associée. Les distributions utilisées sont montrées en insert (le code couleur est le même : rouge pour la CR chaotique et bleu pour la CR conventionnelle). Pour les résultats expérimentaux (Figure 4.18b), les histogrammes associés à la CR chaotique et conventionnelle sont comparés à la distribution théorique  $P_a^{\{d\}}$  (courbe continue verte) estimée par TMA en fixant  $d = 0.89$ <sup>35</sup>. Comme on pouvait s’y attendre, aussi bien numériquement qu’expérimentalement, seules les CR chaotiques sont en accord avec la prédiction théorique  $P_a(\tilde{I}_a)$ . L’écart très important observé entre la prédiction  $P_a$  (4.39) et la distribution des  $\{\tilde{I}_a\}$  des CR conventionnelles est dû à un nombre très élevés de réponses non ergodiques. En effet, si on applique le critère (4.36) sur les variances des  $\tilde{I}_a$ , ont rejette près de 80 % des réponses, dont une grande majorité est constituée de réponses non ergodiques i.e. associées à un champ non statistiquement uniforme ni isotrope. De plus les réponses rejetées sont réparties sur l’ensemble de la bande de fréquence étudiée.

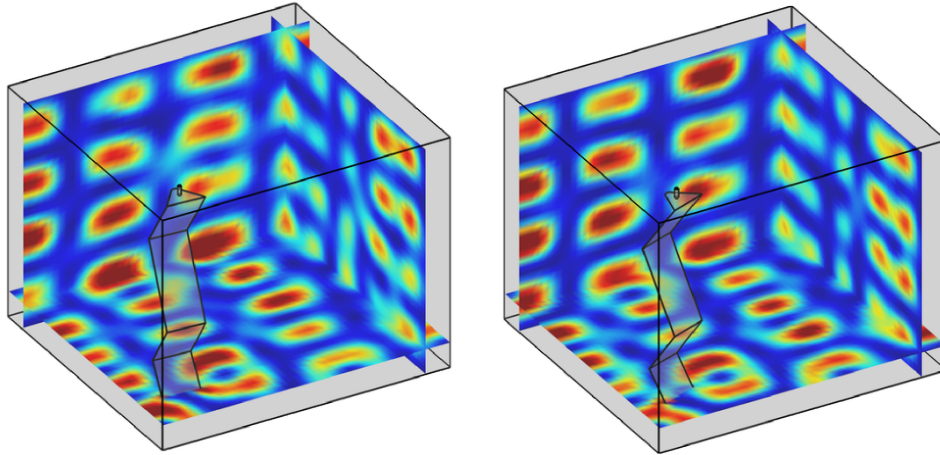


FIGURE 4.19 – **Deux réponses typiques, manifestement non ergodiques, dans la CR conventionnelle.** Elles sont obtenues pour une même fréquence d’excitation  $f = 402\text{MHz}$  et deux positions du brasseur séparées de 24 degrés.

35. On ne trace qu’une seule courbe car les recouvrement modaux estimés par *HI* sont dans les deux CR trop proches (les hémisphères ne contribuent pratiquement pas aux pertes autour de 400 MHz) pour que les courbes soient réellement discernables.

La Figure 4.19 montre deux de ces réponses non ergodiques obtenues pour une même fréquence d'excitation  $f = 402$  MHz mais deux positions différentes du brasseur. On remarquera (i) que ces réponses non génériques ressemblent à celle que l'on attendrait d'une CR sans brasseur<sup>36</sup>, (ii) l'inefficacité du brasseur dans une CR conventionnelle car pour les 30 configurations différentes, obtenues en pivotant le brasseur autour de son axe par pas de 12 degrés, et pour cette seule fréquence d'excitation, 9 réponses sont non ergodiques et 6 d'entre elles correspondent à des positions successives du brasseur (soit une couverture angulaire de 60 degrés).

Ces résultats démontrent clairement le caractère non universel des CR conventionnelles dont la géométrie est basée sur des cavités à murs parallèles, pour des fréquences  $f \sim LUF$ , fréquences pour lesquelles le recouvrement modal reste modéré ( $d \lesssim 1$ ). Dans ce régime, les caractéristiques spatiales de la réponse sont en effet très dépendantes de celles des quelques champs propres complexes associés aux résonances les plus proches de la fréquence d'excitation. On a également montré que la comparaison de la distribution de l'intensité normalisée avec la prédiction  $P_a^{\{d\}}$  (4.32) obtenue par TMA permet de caractériser le caractère statistiquement uniforme et isotrope du champ dans la CR. Dans la communauté CRBM, l'évaluation de l'uniformité du champ repose sur la mesure des fluctuations des valeurs maximales du champ aux points de mesure et de leur écart à une limite haute jugée raisonnable<sup>37</sup> et fixée par la norme internationale [4]. Dans la section suivante, nous allons comparer les CR chaotiques et conventionnelles à l'aune de ce critère.

---

36. Ceci est due à la présence de modes tangentiels dans la CR conventionnelle.

37. Un champ dans une CRBM qui présenterait des fluctuations localement trop importantes peut fausser les tests. En effet, l'OST peut être placé par inadvertance sur un de ces maxima de champ.



## 4.5.2 Critère d'uniformité de la norme internationale

### 4.5.2.1 Étude numérique

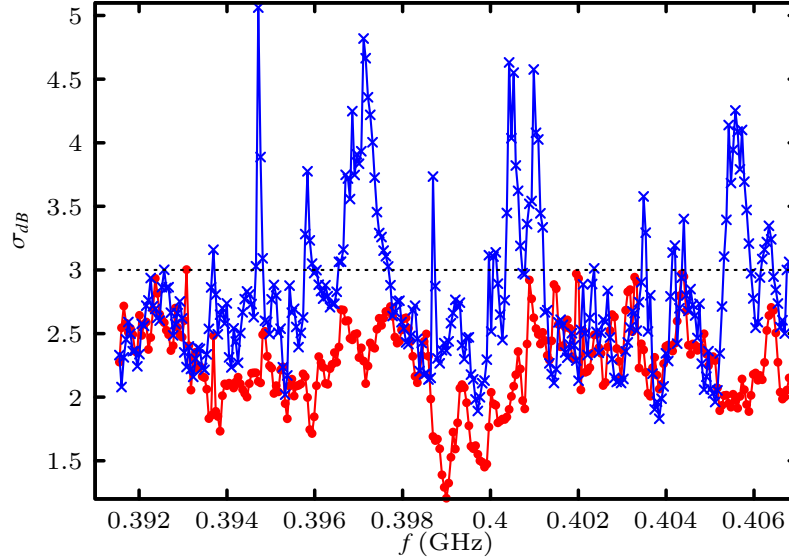


FIGURE 4.20 – **Fluctuations des maxima en dB en fonction de la fréquence de mesure.** CR chaotique : points et courbe en rouge. CR conventionnelle : croix et courbe en bleu.

On s'intéresse ici aux fluctuations des maxima du module du champ évaluées par [4] :

$$\sigma_{dB}(f) = 20 \log_{10} \left( 1 + \frac{\sigma_{\max}}{\langle |E_a|_{\max} \rangle} \right) \quad (4.45)$$

Conformément à [4], on choisit 8 points de mesure (espacés au minimum d'un quart de longueur d'onde). En chacun de ces points, pour 30 positions<sup>38</sup> supposées non corrélées du brasseur on calcule la matrice TGD (4.9) (dont chaque colonne est divisée par la racine carrée de la puissance d'entrée) et on retient, pour chaque ligne, correspondant à la même composante cartésienne pour trois polarisations d'excitation différentes, sur les 30 positions de brasseur, la composante de plus grand module  $|E_a|_{\max} = |\max(G_{ai})|$ . On calcule enfin la moyenne  $\langle |E_a|_{\max} \rangle$  et l'écart type  $\sigma_{\max}$  sur les  $8 \times 3$  va-

38. Encore une fois obtenues en pivotant le brasseur autour de son axe par pas de 12 degrés

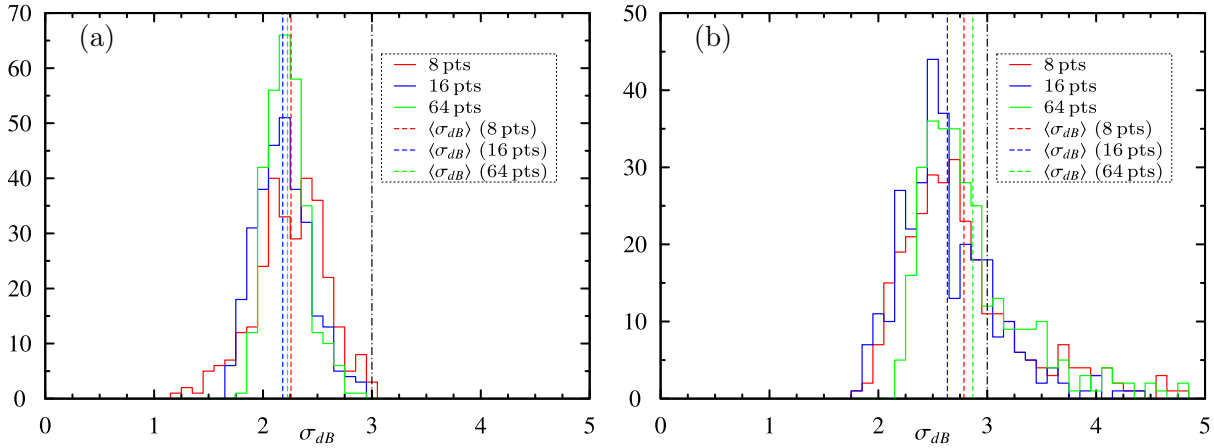


FIGURE 4.21 – **Histogrammes des valeurs de  $\sigma_{dB}$**  obtenues pour 8 (rouge), 16 (bleu), 64 (vert) points de mesure dans la CR chaotique (Figure a) et dans la CR commerciale (Figure b). Les tirets en rouge, bleu et vert représentent respectivement les moyennes de  $\sigma_{dB}$  pour 8, 16 et 64 points. La limite à 3 dB est également indiquée. Les pourcentages de valeurs au-dessus de cette limite sont respectivement de : 0.33 %, 0 % et 0 % pour la CR chaotique et : 25.7 %, 16 % et 27.3 % pour la CR commerciale

leurs de  $|E_a|_{\max} = \{|E_x|_{\max}, |E_y|_{\max}, |E_z|_{\max}\}$ . Dans la norme [4], le champ est considéré comme uniforme lorsque  $\sigma_{dB} < 3\text{dB}$ <sup>39</sup>. La CR chaotique (courbe rouge de la Figure 4.20) vérifie presque toujours et bien mieux ce critère que la CR conventionnelle (courbe bleue de la Figure 4.20).

Afin de mieux quantifier ces différences de comportement, on propose de représenter ces résultats sous forme d'histogrammes et de considérer leurs évolutions lorsqu'on fait varier le nombre de points de mesure (voir Figure 4.21a et Figure 4.21b). Les histogrammes présentés en Figure 4.21a correspondent respectivement à 8, 16 et 64 points de mesures dans la CR chaotique. On constate qu'augmenter le nombre de points de mesure ne modifie pas la moyenne de façon significative (tirets rouges, bleus et verts superposés) et tend à concentrer les histogrammes autour d'une même moyenne nettement inférieure à 3 dB. En revanche, les histogrammes présentés en Figure 4.21b et correspondant à la CR conventionnelle, montrent un comportement fortement dépendant du nombre de points.

39. Ce critère est le critère le plus courant, mais pour les fréquences les plus basses correspondant à peu près au 60<sup>e</sup> mode de CR de dimensions typiques décrites dans [4], le critère est réévalué à  $\sigma_{dB} < 4$ . Comme nous travaillons autour du 370<sup>e</sup> mode on choisit donc le critère  $\sigma_{dB} < 3\text{dB}$ .

En effet les moyennes dépendent significativement du nombre de points de mesures et sont plus élevées que dans la CR chaotique. De surcroît, les dispersions autour de celles-ci ne tendent pas à diminuer avec l'augmentation du nombre de points. Ceci démontre clairement le caractère non universel des statistiques de champ obtenues dans une CR non-chaotique.

Sur la base des résultats numériques présentés ci-dessus, on peut avancer l'hypothèse que le caractère universel des statistiques de la réponse dans une CR chaotique est garant d'une plus grande fiabilité du critère d'uniformité proposé par la norme. La forte sensibilité du critère d'uniformité vis-à-vis du nombre de points de mesure dans une CR conventionnelle lorsque l'on est au voisinage de la LUF tend à démontrer l'inadaptation de ce critère à ce régime dans une CR non chaotique.

#### 4.5.2.2 Étude expérimentale

Commençons par rappeler le contexte expérimental. Dans les configurations d'origine et chaotique de la CR montrée dans la Figure 4.1, on a mesuré la matrice  $S$  entre deux antennes (un dipôle et un monopôle). Les mesures ont été réalisées en 1024 fréquences régulièrement espacées sur une bande de fréquences de 20 MHz centrée autour de 400 MHz, pour 30 positions du brasseur espacées de 12 degrés et pour huit positions différentes de l'antenne monopôle. Après avoir extrait les couplages des antennes (4.42), on déduit de la mesure de  $S_{12}$  la valeur normalisée de l'amplitude de la composante cartésienne du champ le long de l'antenne monopôle dont l'orientation est maintenue fixée (voir (4.43)). On a évalué le facteur de qualité moyen à environ 1500 et ce dernier est peu dégradé par l'introduction des demi-sphères. Dans la gamme de fréquences étudiée (de l'ordre de 7 à 7.3 fois la fréquence de coupure de l'une des configurations), le recouvrement modal demeure modéré ( $d=0.89$ ). À partir des réponses ainsi mesurées, on peut analyser le critère d'uniformité. Comme dans la section précédente, on présente en Figure 4.22 une comparaison des histogrammes de  $\sigma_{dB}$  obtenus expérimentalement dans les deux

configurations ci-dessus mentionnées.

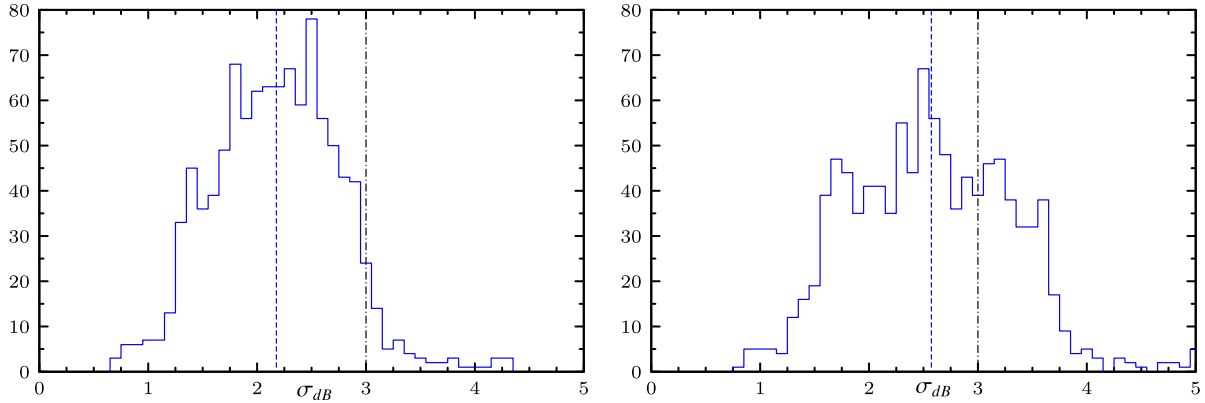


FIGURE 4.22 – **Histogrammes des valeurs de  $\sigma_{dB}$  obtenues expérimentalement dans la CR chaotique et sa version conventionnelle**. Sont aussi reportées : la limite à 3dB (tirets-pointillés en noir) et la moyenne de  $\sigma_{dB}$  (tirets en bleu). L’histogramme de gauche correspond à la CR chaotique avec les 3 demi-sphères et le brasseur ( $\langle\sigma_{db}\rangle = 2.18$ ), l’histogramme de droite correspond à la même CR sans les demi-sphères ( $\langle\sigma_{db}\rangle = 2.57$ ).

Ces mesures préliminaires<sup>40</sup> tendent à confirmer les résultats établis numériquement dans le paragraphe précédent. En effet, le critère d’uniformité est beaucoup mieux vérifié dans la configuration chaotique, notamment du fait d’une dispersion plus réduite de la distribution de  $\sigma_{dB}$  autour d’une valeur moyenne elle-même plus faible.

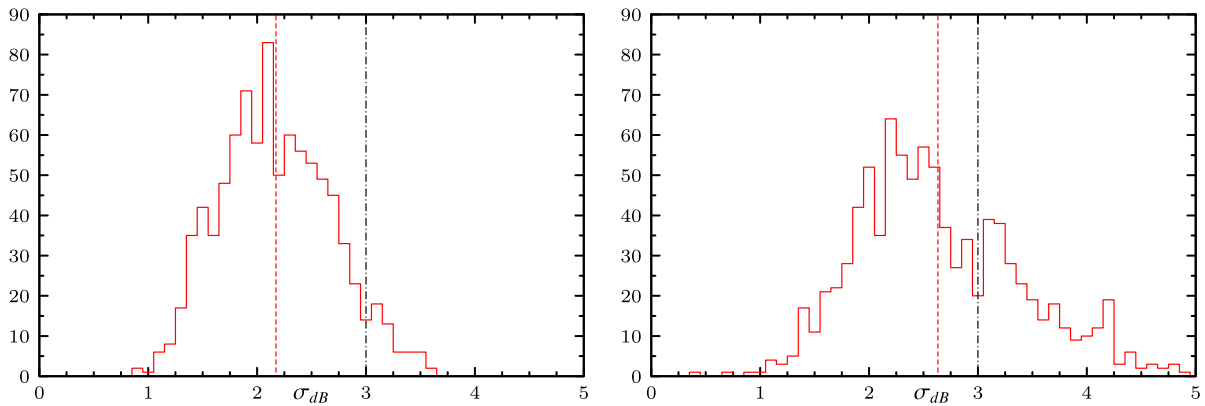


FIGURE 4.23 – **Histogrammes des valeurs de  $\sigma_{dB}$  obtenues numériquement (via le TGD) dans la CR conventionnelle (histogramme de droite) et sa version chaotique (histogramme de gauche)**. Sont aussi reportées : la limite à 3dB (tirets-pointillés en noir) et la moyenne de  $\sigma_{dB}$  (tirets en rouge).  $\langle\sigma_{db}\rangle = 2.17$  (CR chaotique) et  $\langle\sigma_{db}\rangle = 2.63$  (CR conventionnelle).

40. Faute de temps l’étude pour un nombre plus élevés de positions d’antenne n’a pas pu être réalisée

Ces résultats expérimentaux confirment également la validité de notre approche numérique présentée plus haut. En Figure 4.23 sont présentés les histogrammes de  $\sigma_{dB}$ , obtenus à partir du calcul d'un seul élément du TGD dans des géométries et configurations (nombres de pas de brasseur, positions des points de mesure,...) aussi proches que possible de celles de nos expériences. En adaptant la conductivité des patches, on s'assure entre autre que le recouvrement modal moyen dans les simulation vérifie  $d \sim 0.8$ . Les comportements expérimentaux et numériques sont remarquablement semblables. L'étude numérique montre que le critère d'uniformité, dans un régime proche de la LUF et de recouvrement modal modéré, n'a de pertinence que si la CR est chaotique<sup>41</sup>. Ces résultats numériques sont confirmés expérimentalement dans la CR commerciale rendue chaotique. L'approche numérique et l'analyse qui en découle s'en trouvent ainsi validées.

---

41. Cette conclusion est à relier aux observations réalisées plus haut concernant le caractère hautement non universel du champ dans une CR conventionnelle dans un régime de recouvrement modal modéré.



## Chapitre 5

# Étude paramétrique expérimentale des résonances complexes des cavités chaotiques

La sensibilité d'un système à une perturbation intérieure ou extérieure est traditionnellement mesurée, soit en étudiant les modifications qu'elle engendre sur la fonction d'onde du système<sup>1</sup>, soit en étudiant son impact sur le spectre du système et plus particulièrement sur la dynamique des centres des résonances.<sup>2</sup> Lorsque le système est chaotique, la TMA permet de prédire statistiquement le comportement de ces systèmes perturbés, aussi bien dans le cas des systèmes fermés [78] que dans celui des systèmes présentant des pertes [111]. Ces propriétés ont été abondamment vérifiées aussi bien numériquement qu'expérimentalement. Très récemment, Y. Fyodorov et D.V. Savin [143] se sont intéressés à la modification des largeurs de résonance dans un système chaotique ouvert sous l'effet d'une perturbation intérieure au système. En utilisant le formalisme de l'hamiltonien effectif et la TMA, ils ont démontré dans le cas d'une perturbation globale du système, que

---

1. Ce type d'étude est lié au concept de fidélité [141].

2. Sont étudiés par exemple la distribution des croisements évités [120] ou encore la distribution des vitesses des niveaux [142].

le décalage des largeurs engendré par la perturbation suit une loi de probabilité universelle qui dépend uniquement du nombre de canaux de fuite. Le présent chapitre s'inscrit dans la continuité des travaux de Fyodorov et Savin, et consiste principalement dans la vérification expérimentale de leur prédiction. Nous comparerons leur théorie aux résultats expérimentaux obtenus dans des cavités micro-ondes bidimensionnelles faiblement ouvertes et des chambres réverbérantes chaotiques.

Plus court que les précédents, ce chapitre sera pour l'essentiel constitué de la traduction française de l'article [134], publié dans *Physical Review Letters*, et intitulé : *Experimental width shift distribution : a test of nonorthogonality for local and global perturbations*.

## 5.1 Mise en contexte

La caractéristique la plus générale des systèmes quantiques ou ondulatoires ouverts est l'ensemble de résonances complexes. Elles se manifestent dans la diffusion (scattering) par les variations d'énergie aiguës des observables et correspondent aux pôles complexes de la matrice  $S$ . Théoriquement, ces derniers sont donnés par les valeurs propres  $\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2}\Gamma_n$  de l'hamiltonien effectif non hermitien  $H_{\text{eff}}$  du système ouvert [144–147]. La partie anti-hermitienne de  $H_{\text{eff}}$  vient du couplage des états internes (liés) et des états du continuum, donnant lieu à des largeurs de résonance finies  $\Gamma_n > 0$ . L'autre caractéristique clé est que les fonctions propres de  $H_{\text{eff}}$  sont non orthogonales [145, 147]. Leur non orthogonalité est cruciale dans de nombreuses applications ; elle influence les sections efficaces nucléaires, certaines propriétés des lois de décroissance de systèmes quantiques chaotiques [149], et conduit à l'excès de bruit quantique dans les résonateurs laser ouverts [150]. Pour des systèmes invariants par renversement de temps, comme des cavités micro-ondes ouvertes étudiées ci-dessous, la non orthogonalité est due aux fonctions d'onde complexes, qui produit la rigidité de phase [151–153] et la complexité de mode [154, 155]. Ces modes non orthogonaux interviennent également dans des objets réverbérants dissipatifs [156],



des plaques élastiques [157], des microstructures optiques [158] et des milieux aléatoires à pertes [159].

Récemment, une telle non orthogonalité a été identifiée comme la cause première de la sensibilité augmentée aux perturbations dans des systèmes ouverts [160]. Considérons le mouvement paramétrique de résonances complexes sous l'effet de perturbations internes. Ceci peut être modélisé par un terme hermitien  $V$  ajouté à  $H_{\text{eff}}$ , conduisant à l'hamiltonien modifié  $H'_{\text{eff}} = H_{\text{eff}} + V$ . Le décalage complexe  $\delta\mathcal{E}_n = \mathcal{E}'_n - \mathcal{E}_n$  de la  $n$ -ème résonance peut être obtenu par la théorie des perturbations pour des opérateurs non hermitiens [160, 161], donnant à l'ordre dominant  $\delta\mathcal{E}_n = \langle L_n | V | R_n \rangle$ , où  $\langle L_n |$  et  $| R_n \rangle$  sont les fonctions propres Gauche et Droite de  $H_{\text{eff}}$  correspondant à  $\mathcal{E}_n$ . Elles forment un système bi-orthogonal ; en particulier,  $\langle L_n | R_m \rangle = \delta_{nm}$  mais  $U_{nm} \equiv \langle L_n | L_m \rangle \neq \delta_{nm}$  en général. En physique nucléaire,  $U$  est connue sous le nom de matrice de non orthogonalité de Bell-Steinberger [145, 148], voir aussi [162]. Essentiellement, un décalage non nul de largeur  $\delta\Gamma_n = -2\text{Im}\delta\mathcal{E}_n$  est induit seulement par les éléments de  $U$  hors diagonale [160],

$$\delta\Gamma_n = i \sum_m (U_{nm} V_{mn} - V_{nm} U_{mn}), \quad (5.1)$$

où  $V_{nm} = \langle R_n | V | R_m \rangle = V_{mn}^*$ . Il s'annule seulement si les états de résonance sont orthogonaux (tous les  $U_{m \neq n} = 0$ ).

On notera que les mesures de non orthogonalité étudiées dans [150–155] sont liées aux éléments *diagonaux*  $U_{nn}$ . Ces derniers et le décalage des largeurs contiennent des informations complémentaires sur la non orthogonalité. En particulier, les éléments hors diagonale  $U_{nm}$  sont, d'un point de vue paramétrique, plus importants dans le cas de systèmes faiblement ouverts, lorsque les largeurs sont petites en comparaison de l'espacement entre niveaux  $\Delta$  ( $\Gamma \ll \Delta$ ) : dans ce cas  $U_{n \neq m} \sim \frac{\Gamma}{\Delta}$  [160] alors que  $U_{nn} - 1$  est de l'ordre de  $\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$  [155]. Ceci conduit à une plus grande sensibilité de  $\delta\Gamma_n$  aux effets de la non orthogonalité.

Nous présentons la première étude expérimentale de la statistique des décalages de largeurs pour des systèmes complètement chaotiques à l'aide de cavités micro-ondes de différents types. On considèrera des perturbations locales et globales et on déterminera si un comportement différent est obtenu selon que le champ est scalaire ou vectoriel.

## 5.2 Perturbations locales ou perturbations globales : Les éléments théoriques

On considère ici des systèmes faiblement ouverts possédant l'invariance par renversement du temps et on les modélise par la TMA [163, 164]. Les niveaux d'énergie sont ainsi les valeurs propres d'une matrice aléatoire tirée de l'ensemble GOE. Ces  $N$  niveaux sont couplés via la partie anti-hermitienne de  $H_{\text{eff}}$  à  $M$  canaux équivalents [144, 145], caractérisés par la même force de couplage  $\kappa \ll 1$ . Dans ce régime, les positions des résonances  $E_n$  sont données par ces valeurs propres et exhibent des fluctuations universelles à l'échelle locale de  $\Delta \sim \frac{1}{N}$  dans la limite  $N \gg 1$ . Les statistiques gaussiennes des vecteurs propres GOE (correspondant aux fonctions d'onde du système fermé) conduisent à la distribution de type  $\chi_M^2$ ,

$$P_M(\gamma) = \frac{1}{2^{M/2}\Gamma(M/2)} \gamma^{M/2-1} e^{-\gamma/2}, \quad (5.2)$$

pour les largeurs de résonance réduites  $\gamma_n = \pi\Gamma_n/(2\kappa\Delta)$  [145, 146].

Afin de décrire perturbations locale et globale sur un pied d'égalité, nous suivons [165, 166] et représentons le terme de perturbation comme  $V = \sum_{q=1}^r \alpha_q |q\rangle\langle q|$ . Son rang  $r$  gouverne la transition entre le cas local ( $r$  petit) et le cas global ( $r \gg 1$ ). On peut interpréter  $V$  comme découlant de  $r$  diffuseurs ponctuels dont l'efficacité est caractérisée par des coefficients  $\alpha_q$ , où  $q$  correspond aux positions des diffuseurs. Par exemple, un unique diffuseur ajouté au système (fermé) induit un décalage de l'énergie  $\delta E_n = \langle n|V|n\rangle = \alpha\psi_n^2(q)$  du  $n$ -ème niveau,  $\psi_n(q) = \langle q|n\rangle$  étant la composante de la fonction d'onde au point  $q$ .

Cependant, en déplaçant le diffuseur du point  $q$  au point  $q'$ , ce qui est effectivement réalisé dans nos expériences (voir Fig. 5.1), il résulte un décalage  $\delta E_n = \alpha(\psi_n(q)^2 - \psi_n(q')^2)$ . Ce dernier est équivalent à une perturbation de rang 2 avec  $V = \alpha(|q\rangle\langle q| - |q'\rangle\langle q'|)$  [166]. En général, la variance des décalages de l'énergie est donnée par  $\text{var}(\delta E_n) = \frac{2}{N^2} \text{tr}(V^2)$ , ce qui fixe l'échelle de la dynamique paramétrique des niveaux [167]. En particulier, les décalages réduits  $\sim \delta E_n / \sqrt{\text{var}(\delta E_n)}$  ('vitesses de niveaux') acquièrent des fluctuations universelles d'un type distinct dans les cas d'une perturbation locale ou globale, donnée respectivement par une distribution  $K_0$  (si  $r = 2$ , local) [168] ou gaussienne (global). Une transition entre les deux apparaît rapidement lorsque le rang de la perturbation augmente [166].

Dans le cadre de la même limite  $\kappa \ll 1$ , des fonctions d'onde de distribution gaussienne conduisent à la représentation suivante pour les décalages de largeur réduits ('vitesses de largeur') [160] :

$$y_n \equiv \frac{\delta \Gamma_n}{2\kappa \sqrt{2\text{var}(\delta E_n)}} = \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\pi} \sum_{m \neq n} \frac{z_m v_m \Delta}{E_n - E_m}. \quad (5.3)$$

Ici, les valeurs réelles  $z_m$  sont des variables aléatoires normales (liées au couplage avec les canaux) tandis que les réels  $v_m = N\langle m|V|n\rangle / \sqrt{\text{Tr}(V^2)}$  sont les éléments de matrice normalisés ( $m \neq n$ ) de la perturbation. Ces quantités sont statistiquement indépendantes de  $E_n$  et de  $\gamma_n$ , ce qui résulte de la séparation en fluctuations indépendantes du spectre et des fonctions d'onde indépendantes pour des systèmes chaotiques ouverts faiblement couplés.

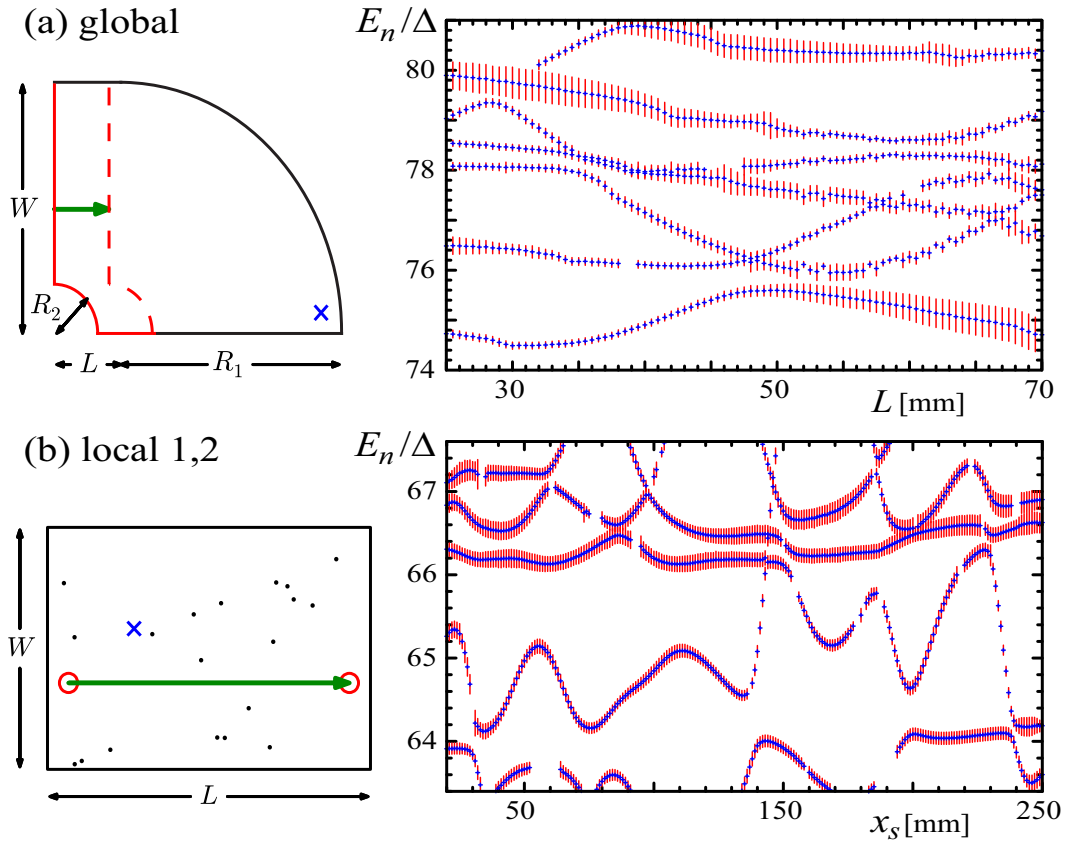


FIGURE 5.1 – **Le dispositif expérimental**(à gauche) pour deux cavités micro-ondes avec une seule antenne (signalée par une croix) et **les dépendances paramétriques** (à droite) des énergies renormalisées par Weyl (+) ainsi que des largeurs (lignes verticales en rouge) : (a) Un stade de Sinaiï pourvu d'un mur mobile ( $R_1 = W = 240$  mm,  $R_2 = 50$  mm),  $L$  variant de 1.5 à 70.5 mm par pas de 0.5 mm ; (b) Un billard rectangulaire ( $L = 340$  mm,  $W = 240$  mm) avec 19 diffuseurs disposés aléatoirement (points noirs) de rayon  $r_c = 2.3$  mm. Un diffuseur additionnel (cercle rouge) de rayon  $r_{p1} = 2.3$  mm ou  $r_{p2} = 9.75$  mm était déplacé le long de la ligne  $x_s$  (flèche verte) par pas de  $\delta r = 1$  mm ou 0.5, respectivement.

Afin de caractériser les statistiques universelles des vitesses de largeur (5.3), on calcule leur distribution de probabilité (au centre du spectre),  $\mathcal{P}_M(y) = \Delta \langle \sum_{n=1}^N \delta(E_n) \delta(y - y_n) \rangle$ , où  $\langle \dots \rangle$  représente une moyenne d'ensemble. A l'aide du théorème de convolution, elle peut se réécrire [160]

$$\mathcal{P}_M(y) = \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma}} P_M(\gamma) \phi\left(\frac{y}{\sqrt{\gamma}}\right), \quad (5.4)$$

où la fonction  $\phi(y)$  est défini par

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega y} \left\langle \prod_{m \neq n} \exp \left\{ -i \frac{\omega z_m v_m}{\pi E_m / \Delta} \right\} \right\rangle. \quad (5.5)$$

Pour des perturbations globales, les quantités  $v_m$  sont des variables aléatoires distribuées selon la loi normale [160], ce qui rend l'intégration sur  $\{z_m, v_m\}$  immédiate. Elle résulte en une moyenne GOE de certains déterminants spectraux, qui fut également dérivée dans [160], où la forme explicite de  $\phi$  est

$$\phi^{(\text{gl})}(y) = \frac{4 + y^2}{6(1 + y^2)^{5/2}}. \quad (5.6)$$

En substituant dans (5.4), on obtient la distribution des vitesses de largeur dans le cas global,  $\mathcal{P}_M^{(\text{gl})}(y)$ .

Pour les perturbations locales,  $v_m$  ont des statistiques plus compliquées. Néanmoins, un résultat exact peut être établi dans le cas particulier de  $r$  diffuseurs équivalents (tous les  $|\alpha_q| = \alpha$ ), ce qui nous intéresse ici. Pour ce faire, nous traitons d'abord  $v_m = \frac{N}{\sqrt{r}}(\vec{\psi}_m \cdot \vec{\psi}_n)$  comme un produit scalaire de deux vecteurs de dimension  $r$  des composantes de la fonction d'onde correspondante. Ce dernier peut s'exprimer naturellement  $v_m = \frac{\sqrt{\eta_n}}{\sqrt{r}} \nu_m$  en termes de longueur de vecteur  $|\vec{\psi}_n| = \sqrt{\eta_n}$  et de la projection  $\nu_m$ . L'avantage en est que  $\nu$  et  $\eta$  sont statistiquement indépendants [155], distribués respectivement selon une loi normale et une distribution en  $\chi_r^2$  [cf. Eq. (5.2)]. Ensuite, une intégrale gaussienne  $\{z_m, \nu_m\}$  dans (5.5) aboutit à

$$\phi_r^{(\text{loc})}(y) = \left\langle \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\eta}} \phi^{(\text{gl})} \left( \frac{\sqrt{r} y}{\sqrt{\eta}} \right) \right\rangle_{\eta}, \quad (5.7)$$

où  $\phi^{(\text{gl})}$  est donné par l'Eq. (5.6) et la moyenne restant sur  $\eta$  est laissée comme dernière étape [169]. En combinant les Eqs. (5.4) et (5.7) on résout le problème exactement pour un rang  $r$  arbitraire.

Les dépendances fonctionnelles de  $\phi_r^{(\text{loc})}(y)$  et  $\phi^{(\text{gl})}(y)$  sont les mêmes dans les queues

et diffèrent seulement au voisinage des maxima, mais leur différence diminue rapidement lorsque  $r$  croît. Dans le cas d'un petit nombre de canaux, la différence est encore plus atténuée pour la distribution des vitesses de largeur  $\mathcal{P}_M(y)$ , e.g. voir Fig. 5.2, du fait de l'intégration supplémentaire Eq. (5.4) sur les largeurs. Puisque la distribution des largeurs (5.2) tend vers  $\delta(\gamma - M)$  quand  $M \rightarrow \infty$ , on obtient  $\mathcal{P}_{M \gg 1}(y) = \frac{1}{\sqrt{M}} \phi_r^{(\text{loc})}(\frac{y}{\sqrt{M}})$  comme distribution limite des vitesses de largeur dans ce cas. Ainsi, les systèmes comportant un grand nombre de canaux s'avèrent être plus sensibles à l'influence d'un rang  $r$  fini que leurs analogues avec peu de canaux. On mentionnera également la loi de puissance générale  $\mathcal{P}_M(y) \propto |y|^{-3}$  de la distribution pour  $|y| \gg 1$ , qui peut être reliée à la répulsion linéaire entre niveaux [160].

### 5.3 Cavités EM bi-dimensionnels : Expériences avec des champs scalaires

Afin d'explorer les statistiques des vitesses de largeurs dans le cas de champs scalaires nous utilisons des cavités micro-ondes cylindriques (bi-dimensionnelles), où la composante selon  $z$  du champ électrique correspond à la fonction d'onde quantique  $\psi$  et le nombre d'onde au carré  $k^2$  à l'énergie  $E$  [171]. Leur hauteur est de 8 mm, ce qui donne une fréquence de coupure de  $\nu_{\text{cut}} = 18.75$  GHz et la gamme de fréquence exploitée se situe autour de 5 GHz (longueur d'onde 6 cm). La Figure 5.1 montre trois différents systèmes. Le premier est un billard chaotique de type Sinai-stade [see Fig. 5.1(a)] que nous qualifierons de perturbation globale. Nous avons utilisé une gamme de la 50<sup>e</sup> à la 100<sup>e</sup> résonance pour la distribution des vitesses de largeur. Le deuxième (troisième) système est une cavité rectangulaire dotée de 19 diffuseurs, où un diffuseur additionnel de même rayon (de plus grand rayon) est déplacé [voir Fig. 5.1(b) et [168] pour plus de détails], appelés ci-après local 1 (local 2). Pour local 1 (local 2) on a considéré les résonances de la 50<sup>e</sup> à la 100<sup>e</sup> (85<sup>e</sup>). Les trois systèmes sont tous chaotiques et dans le régime balistique

(asymptotique), n'exhibant expérimentalement aucun croisement de niveau.

Les énergies complexes des résonances isolées ont été obtenues grâce à des ajustements par des lorentziennes. Dans tous les cas les énergies et largeurs ont été normalisées par rapport à l'espacement moyen entre niveaux  $\Delta$  grâce à la loi de Weyl  $E_n/\Delta = \pi A(\nu_n/c)^2 + P(\nu_n/c)$ , où  $\nu_n$ ,  $A$  et  $P$  sont la fréquence propre, l'aire et le périmètre. Dans le cas de la perturbation globale, ce redressement permet de s'affranchir du biais global en énergie lié au changement d'aire de la cavité.

La dépendance paramétrique des résonances complexes de ces systèmes est montrée en Fig. 5.1. Les croix bleues indiquent les positions des résonances et la longueur des lignes verticales rouges correspond à leur largeur. Des différences apparaissent clairement dans la dynamique paramétrique des niveaux entre perturbations globale et locale. C'est encore plus patent dans la distribution des vitesses de niveaux, qui est gaussienne (ou selon une distribution  $K_0$ ) dans le cas global (local), ces deux cas ayant été étudiés expérimentalement dans [168, 172]. Les différences entre global et local sont moins prononcées pour les variations de largeur, comme il a été discuté plus haut.

Afin d'obtenir les décalages de largeur réduits (5.3) à partir des données mesurées, on a besoin de deux paramètres : le couplage de l'antenne et la variance de  $\delta E_n$ . Tous deux peuvent être fixés a priori. Le couplage de l'antenne peut être calculé par [173]

$$\kappa = \frac{|1 - \langle S_{11} \rangle_{\nu,p}|^2}{1 - |\langle S_{11} \rangle_{\nu,p}|^2}, \quad (5.8)$$

où  $S_{11}$  est l'amplitude complexe en réflexion et un soin particulier a été porté à la suppression de déphasages globaux induits par les antennes. La moyenne  $\langle \dots \rangle_{\nu,p}$  a été réalisée sur l'ensemble de la gamme de fréquences et pour tous les paramètres  $p$ , donnant  $\kappa = 0.180$  (global),  $\kappa = 0.065$  (local 1) et  $\kappa = 0.098$  (local 2). Nous avons également pris en compte la largeur d'absorption  $\Gamma_n^{(w)}$  due à la conductivité finie des parois métalliques, mais négligé ses variations, puisque  $\Gamma_n^{(w)}$  comme fonction du paramètre subit de bien moindres

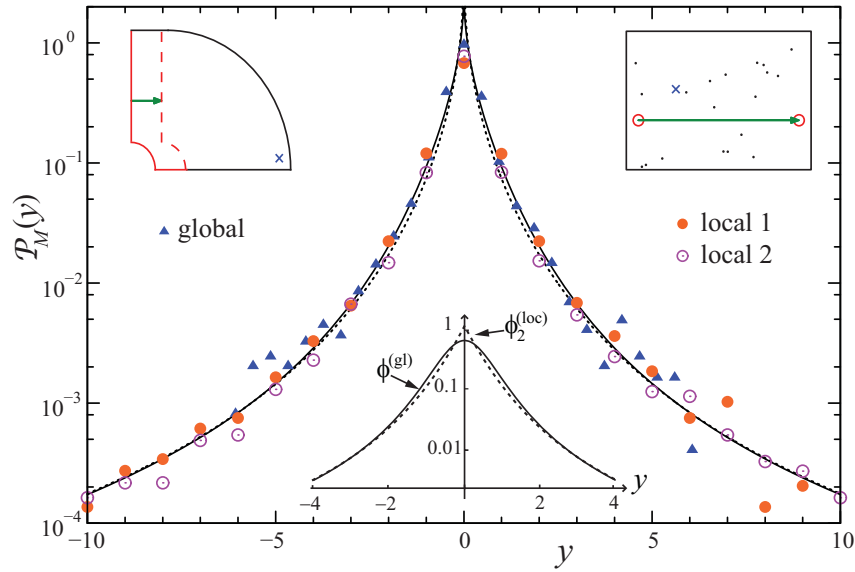


FIGURE 5.2 – **Distribution des vitesses de largeur normalisées expérimentales**  $y$  pour les trois systèmes correspondant à la Figure 5.1 : global ( $\blacktriangle$ ), local 1, ( $\bullet$ ) et local 2 ( $\odot$ ). La courbe en trait plein (en tiret) correspond à la prédiction théorique pour une perturbation globale (locale,  $r = 2$ ) avec  $M = 1$ . L'insert en bas de figure montre le comportement de  $\phi^{(gl)}$  et  $\phi_2^{(loc)}$ , voir Eqs. (5.6) and (5.7).

modifications que celles dues aux antennes couplées. On notera que nous ne supposons cependant pas que  $\Gamma_n^{(w)}$  est le même pour toutes les résonances [154, 174, 175].

Les distributions expérimentales des vitesses de largeur sont présentées en Fig. 5.2. Après normalisation comme décrite plus haut, il n'y a aucun paramètre libre pour la comparaison avec le résultat théorique (5.4), puisque  $M$  est fixé par le nombre d'antennes connectées, i.e.  $M = 1$  ici. Dans tous les cas, on constate un très bon accord avec la théorie correspondante. Néanmoins, l'échantillonnage statistique se révèle insuffisant pour distinguer entre perturbations globale et locale par la distribution des vitesses de largeur. Au niveau du seul point où ce serait possible d'un point de vue statistique ( $y$  voisin de 0), l'approximation expérimentale consistant à négliger les effets induits par l'absorption n'est plus valide.



## 5.4 Chambres réverbérantes électromagnétiques : Expériences et Simulations avec des champs vectoriels.

Pour conforter l'universalité des fluctuations de décalages de largeur dans le cas tridimensionnel de champs de vecteurs électromagnétiques, nous présentons des résultats expérimentaux et numériques dans une chambre réverbérante (CR) chaotique. Dans cette partie de notre étude, nous mettons en avant la dépendance dans le nombre de canaux  $M$  par l'intermédiaire de divers types de pertes induites dans la cavité soit par des antennes (expériences) soit par de la dissipation ohmique distribuée sur les murs (simulations numériques). Les expériences ont été réalisées dans une CR commerciale de volume approximatif  $19 \text{ m}^3$ , rendue chaotique par l'adjonction de trois demi-sphères sur les murs [176] (insert Fig. 5.3). La variation paramétrique correspond à la rotation d'un brasseur asymétrique agissant comme une perturbation globale. Les mesures ont été effectuées via soit une unique antenne dipôle connectée dans un mur ( $M = 1$ ) ou entre cette dernière antenne et une antenne monopôle ( $M = 2$ ) placée à l'intérieur de la cavité loin de tout mur. On rappelle que la CR est dans un régime de recouvrement modale modéré  $d \lesssim 1$ . En appliquant la méthode dite *harmonic inversion* [117], nous avons extrait environ 70 fréquences de résonance ainsi que leurs largeurs pour chacune des 128 (90) positions du brasseur tournant pour  $M = 1$  ( $M = 2$ ). Les distributions de vitesses de largeur qui en résultent sont présentées en Fig. 5.3, démontrant un très bon accord avec les prédictions théoriques, Eqs. (5.4) et (5.6), dans chacun des cas [178]. Ainsi la distribution des vitesses de largeur, obtenue théoriquement pour des systèmes quantiques chaotiques, i.e. des champs scalaires, se trouve être également valide pour des champs électromagnétiques vectoriels.

Il est difficile d'étudier le rôle d'un plus grand nombre de canaux expérimentalement, car le couplage de chaque devrait alors être réduit, ce qui conduirait à des rapports signal

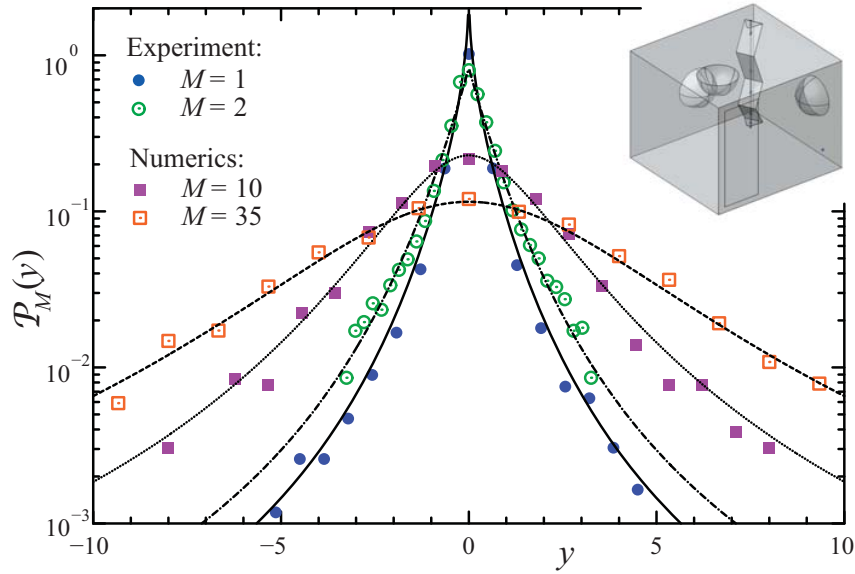


FIGURE 5.3 – **Distribution des vitesses de largeur pour plusieurs configurations de la CR chaotique montrée en insert**, dotée d'un brasseur agissant comme une perturbation globale. Les résultats expérimentaux correspondent à  $M = 1$  ( $\bullet$ ) et  $M=2$  ( $\odot$ ), et les simulations numériques à  $M = 10$  ( $\blacksquare$ ) et  $M=35$  ( $\boxtimes$ ). Les lignes correspondent aux résultats analytiques. Pour la normalisation des décalages de largeur, une valeur ajustée du couplage a été utilisée, donnant  $\kappa_{M=1} = 0.45$ ,  $\kappa_{M=2} = 0.16$ ,  $\kappa_{M=10} = 0.049$ , et  $\kappa_{M=35} = 0.019$ .

à bruit trop faibles pour permettre une extraction raisonnable des résonances complexes. De plus, dans ce cas, les pertes liées à la dissipation deviendraient du même ordre que celles induites par les antennes. Dès lors, nous avons polystyrène effectué des simulations numériques basées sur une méthode aux éléments finis et calculé les résonances de deux configurations différentes de la CR chaotique décrite dans [96, 100], où le couplage est simulé par une absorption locale de bord à l'aide de patches carrés de dissipation ohmique distribués sur les murs. En ajustant la conductivité, la taille et le nombre des patches, nous pouvons contrôler le facteur de qualité ainsi que le nombre effectif de canaux faiblement absorbants, qui peut être estimé par  $M = 2\langle\Gamma\rangle^2/\text{var}(\Gamma)$ . La force du couplage étant donnée par  $\kappa \simeq \pi d/(2M)$ , nous avons obtenu  $M = 10$ ,  $d = 0.34$ , et  $\kappa_{10} = 0.05$  pour une configuration étudiée et  $M = 35$ ,  $d = 0.51$ , et  $\kappa_{35} = 0.024$  pour l'autre. Pour les deux configurations, les distributions de vitesses de largeur sont présentées en Fig. 5.3,

montrant un accord excellent avec les prédictions théoriques.

En conclusion, nous avons vérifié expérimentalement les résultats théoriques concernant la distribution des décalages de largeur [160] pour des perturbations globales aussi bien pour des champs scalaires que des champs électromagnétiques vectoriels, renforçant le caractère universel des statistiques de décalages de largeur dans les systèmes chaotiques faiblement ouverts. De surcroît, nous avons étendu l'approche théorique à une perturbation de rang quelconque, qui a également permis de montrer un excellent accord avec nos résultats expérimentaux.



# Conclusion et Perspectives

Dès l'introduction du manuscrit, nous avons fait apparaître deux grands axes : un premier, plus orienté vers des problématiques de science fondamentale, dans lequel on s'intéresse aux comportements statistiques des systèmes chaotiques ouverts et le second, plus appliqué, où l'on se demande si l'utilisation de cavités chaotiques permet d'améliorer le comportement statistique des chambres réverbérantes dans des gammes de fréquences proches de la LUF. Bien que tout au long des trois années de thèses, dont ce manuscrit est la synthèse, ces deux axes se soient mutuellement enrichis, je me permettrai de conclure séparément pour chacun d'eux.

Du point de vue de la physique des systèmes chaotiques ouverts, une part importante de ses travaux de thèse consistait à démontrer qu'une cavité électromagnétique 3D rendue chaotique et présentant des pertes pouvait être considérée comme un système modèle du chaos ondulatoire. À cette fin, nous avons montré comment étendre le formalisme de l'hamiltonien effectif aux systèmes ouverts dont le champ est vectoriel, permettant ainsi l'utilisation de la théorie des matrices aléatoires pour prédire les comportements statistiques spectraux et spatiaux des cavités chaotiques électromagnétiques tridimensionnelles. Cette extension, vers des problèmes liés à des ondes vectorielles, d'un formalisme originellement adapté aux ondes scalaires, repose essentiellement sur les définitions de la condition de bi-orthogonalité des champs propres vectoriels et celle de la *phase rigidity* d'un champ vectoriel. Nous avons pu vérifier numériquement et expérimentalement l'efficacité de ce formalisme en comparant dans des chambres réverbérantes rendues chao-

tiques, les statistiques spectrales des résonances complexes (distribution des largeurs des résonances, distribution des décalages des largeurs, NNSD) et les statistiques spatiales des champs propres (distribution de la *phase rigidity*, distribution du module carré des composantes cartésiennes et de la norme du champ électrique) avec les prédictions issues de la TMA. Plus précisément, on s'est intéressé au régime dans lequel la cavité est supposée être connectée à son environnement par un nombre fini de canaux identiques et faiblement couplés. Dans ce régime particulier, l'ensemble des distributions analytiques déduites de la TMA dépendent explicitement de deux paramètres : le recouvrement modal et le nombre de canaux de fuites. Ces deux quantités pouvant être estimées dans une cavité à partir de ses statistiques spectrales. Un autre résultat important concerne plus particulièrement les statistiques spatiales des fonctions d'ondes associées à un ensemble de réponses d'un système chaotique ouvert. Comme pour la distribution d'intensité d'un ensemble de champs propres, la distribution d'intensité d'un ensemble de réponses ne peut être prédite qu'à condition de connaître au préalable la distribution de la *phase rigidity*. Or, nous ne possédons aucune forme analytique pour cette quantité clef, même dans le régime de couplages faibles dans lequel une expression analytique existe, mais uniquement pour les champs propres. Néanmoins, nous avons montré, à partir de simulations de matrices aléatoires, qui ont ensuite été corroborées par des simulations de cavités électromagnétiques 3D chaotiques et des mesures expérimentales réalisées dans notre chambre réverbérante rendue chaotique, que la distribution de la *phase rigidity* des réponses d'un système chaotique ouvert semble uniquement dépendre de la valeur prise par le recouvrement modal, indépendamment du nombre de canaux de fuites et dans des régimes de couplages et de recouvrement modal faibles à modérés. Il est donc possible de prédire a priori la distribution d'intensité d'un ensemble de réponses grâce à des simulations de matrices aléatoires dans lesquelles on fixe la valeur du recouvrement modal à la valeur mesurée dans la cavité. Pour conclure sur l'aspect fondamental, une perspective à court terme consisterait à essayer de trouver une expression analytique pour la distribution de

la *phase rigidity* de la réponse. Cette étude permettrait entre autres de déterminer pour quels régimes le recouvrement modal est le seul paramètre dont dépendent les statistiques spatiales de la réponse et d'analyser l'influence des autres paramètres tels que le couplage ou le nombre de canaux de fuites. Cette étude peut également nous amener à nous interroger sur l'existence d'une valeur seuil de recouvrement modal à partir de laquelle les hypothèses de Hill sont enfin valides.

Du point de vue plus appliqué, nous avons d'abord démontré qu'une CR conventionnelle n'est pas une cavité chaotique, car aussi complexe que puissent être la géométrie du brasseur, la CR conserve un nombre important de surfaces de mur en vis-à-vis qui sont toujours parallèles. Celles-ci autorisent l'existence d'un grand nombre de modes tangentiels, non-ergodiques. Cependant, il est possible de rendre chaotique une CR conventionnelle, et ainsi de profiter de modes génériques ergodiques, grâce à des modifications géométriques très simples visant à supprimer ces surfaces parallèles. Les statistiques spatiales des cavités chaotiques étant fortement liées à leurs statistiques spectrales. En comparant ces dernières aux prédictions GOE de la TMA, on peut sonder l'efficacité des modifications apportées à la CR. Ensuite, nous avons comparé expérimentalement et numériquement, pour des fréquences légèrement au-dessus de la LUF, les distributions d'intensité du champ dans une chambre réverbérante conventionnelle et dans sa version rendue chaotique. Nous avons montré que le champ est statistiquement uniforme (il suit les hypothèses de Pnini et Shapiro) uniquement dans la chambre réverbérante chaotique et que proche de la LUF les hypothèses de Hill ne peuvent pas être valides. Enfin, nous avons mis en évidence que le caractère universel des statistiques de la réponse dans une CR chaotique est garant d'une plus grande fiabilité du critère d'uniformité proposé par la norme. Alors que la forte sensibilité du critère d'uniformité vis-à-vis du nombre de points de mesure dans une CR conventionnelle lorsque l'on est au voisinage de la LUF, tend à démontrer l'inadaptation de ce critère à ce régime dans une CR non chaotique. Nous avons donc démontré, qu'en rendant une chambre réverbérante chaotique, on améliorerait considérablement son

comportement autour de la LUF. On peut donc tout naturellement se demander si l'utilisation d'une chambre réverbérante chaotique ne permet pas également de réduire la LUF, voire même de proposer une unique définition pour cette dernière. Une réponse positive constituerait un argument supplémentaire en faveur de l'utilisation de CR chaotiques pour les tests de compatibilité électromagnétique. Cependant, une utilisation systématique de CR chaotique par les industriels ne pourra être envisagée qu'une fois qu'il aura été démontré qu'une CR chaotique remplit toutes les recommandations de l'actuelle norme. À plus longs termes, il pourrait même être envisagé l'établissement d'une norme modifiée, proposant des définitions et des critères qui profiteraient des comportements statistiques universelles des cavités chaotiques et en particulier du lien très fort entre leurs statistiques spatiales et spectrales.



# Bibliographie

- [1] R. Weaver, “3 The Unreasonable Effectiveness of Random Matrix Theory for the Vibrations and Acoustics of Complex Structures,” in *New Directions in Linear Acoustics and Vibration*, M. Wright and R. Weaver (eds.), ch. 3, pp. 42–75. Cambridge University Press, 2010.
- [2] C. Lemoine, *Contribution à l’analyse statistique des mesures en chambre réverbérante à brassage de modes. Applications à la détermination de l’efficacité de brassage et de l’incertitude de mesure dans un contexte CEM et radiofréquences*. PhD thesis, 2008. <http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00336456/>.
- [3] C. Bruns, *Three-dimensional simulation and experimental verification of a reverberation chamber*. PhD thesis, 2005.  
<http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:28055/eth-28055-02.pdf>.
- [4] N. I. 61000-4-21, “Electromagnetic Compatibility (EMC) - Part 4-21 : Testing and Measurement Techniques - Reverberation Chamber Test Methods,” *International Electrotechnical Commission (IEC) International standard* (2003-2011) .
- [5] RTCADO-160D/E, “Environmental conditions and test procedures for airborne equipment,” *RTCA Std.* (2000) .
- [6] MIL-STD-461F, “Interface standard requirements for the control of electromagnetic interference characteristics of subsystems and equipment,” *Departments and Agencies of the Department of Defense(USA)* (2007) .
- [7] IEC-6100-4-3, “Electromagnetic compatibility (emc)-part 4.3 : Testing and measurement techniques-radiated, radio-frequency electromagnetic field immunity test,” *International Electrotechnical Commission (IEC) International standard* (2006) .
- [8] P. O’Connor, J. Gehlen, and E. Heller, “Properties of Random Superpositions of Plane Waves P,” *Physical review Letters* **58** no. 13, (1987) 1296–1299.
- [9] J. Goodman, “Statistical properties of laser speckle patterns,” *Laser speckle and related phenomena* (1975) .
- [10] J. Goodman, “Some fundamental properties of speckle,” *Journal of the Optical Society of America* **66** no. 11, (Nov., 1976) 1145.
- [11] R. Hioki and T. Suzuki, “Coherent Light Transmitted through Optical Fiber,” *Japanese Journal of Applied Physics* **4** no. 10, (1965) 817.
- [12] T. Suzuki, “Experimental Study of Interference in Optical Fibers,” *Japanese Journal of Applied Physics* **6** no. 3, (1967) 348.

- [13] N. Takai and T. Asakura, "Statistical properties of laser speckles produced under illumination from a multimode optical fiber," *Journal of the Optical Society of America A* **2** no. 8, (Aug., 1985) 1282.
- [14] M. Imai, "Statistical properties of laser optical fiber speckles," *Bulletin of the Faculty of Engineering, Hokkaido University* **130** no. 8, (Aug., 1986) 1282.
- [15] V. Doya, O. Legrand, F. Mortessagne, and C. Miniatura, "Speckle statistics in a chaotic multimode fiber," *Physical Review E* **65** no. 5, (May, 2002) 056223.
- [16] S. McDonald and A. Kaufman, "Wave chaos in the stadium : statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation," *Physical Review A* **37** no. 8, (1988) 3067–3086.
- [17] P. Morse and H. Feshbach in *Methods of theoretical physics*, International series in pure and applied physics, ch. 7 and 13. McGraw-Hill, 1953.
- [18] R. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. IEEE/OUP series on electromagnetic wave theory. IEEE Press, 1991.
- [19] J. Barthélemy, *Chaos ondulatoire en présence de pertes : modélisation et expérience de billards micro-ondes*. PhD thesis, Nice Sophia Antipolis, 2003.
- [20] A. Mitra and T. Trost, "Statistical simulations and measurements inside a microwave reverberation chamber," in *IEEE 1997, EMC, Austin Style. IEEE 1997 International Symposium on Electromagnetic Compatibility. Symposium Record (Cat. No.97CH36113)*, no. 3, pp. 48–53. IEEE, 1997.
- [21] F. Leferink, J.-C. Boudenot, and W. van Etten, "Experimental results obtained in the vibrating intrinsic reverberation chamber," in *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility. Symposium Record (Cat. No.00CH37016)*, vol. 2, pp. 639–644. IEEE, 2000.
- [22] D. Hill, *Electromagnetic fields in cavities : deterministic and statistical theories*. IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. IEEE ; Wiley, 2009.
- [23] S.-P. Yu and C. Bunting, "Statistical investigation of frequency-stirred reverberation chambers," in *2003 IEEE Symposium on Electromagnetic Compatibility. Symposium Record (Cat. No.03CH37446)*, vol. 1, pp. 155–159. IEEE, 2003.
- [24] U. Carlberg, P.-S. Kildal, and J. Carlsson, "Numerical Study of Position Stirring and Frequency Stirring in a Loaded Reverberation Chamber," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **51** no. 1, (Feb., 2009) 12–17. <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=4785163>.
- [25] S.-g. Liang, Z.-j. Wang, and J.-d. Xu, "Source stirring reverberation chamber design and experimental investigation," in *2009 Asia Pacific Microwave Conference*, no. 4, pp. 1254–1257. IEEE, Dec., 2009.
- [26] S. Li, J. Wang, H. Xie, and X. Lu, "Improvement of Source Stirring to Field Uniformity in Reverberation Chamber," in *PIERS Proceedings 2011 in Suzhou*, vol. 1, pp. 302–307. 2011.

- [27] K. Madsen, P. Hallbjørner, and C. Orlenius, "Models for the number of independent samples in reverberation chamber measurements with mechanical, frequency, and combined stirring," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* **3** no. 1, (Dec., 2004) 48–51.
- [28] R. Balian and B. Duplantier, "Electromagnetic waves near perfect conductors. I. Multiple scattering expansions. Distribution of modes," *Annals of physics* **104** no. 2, (Apr., 1977) 300–335.
- [29] D. Hill, "Electromagnetic theory of reverberation chambers," *NIST Technical note* **1506** (1998) .
- [30] D. Hill, "Plane wave integral representation for fields in reverberation chambers," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **40** no. 3, (1998) 209–217.
- [31] T. Ericson, "Fluctuations of Nuclear Cross Sections in the "Continuum" Region," *Physical Review Letters* **5** no. 9, (Nov., 1960) 430–431.
- [32] G. Stania and H. Walther, "Quantum Chaotic Scattering in Atomic Physics : Ericson Fluctuations in Photoionization," *Physical Review Letters* **95** no. 19, (Nov., 2005) 194101.
- [33] M. R. Schroeder, "Frequency-Correlation Functions of Frequency Responses in Rooms," *The Journal of the Acoustical Society of America* **34** no. 12, (Dec., 1962) 1819–1823.
- [34] F. Mortessagne, O. Legrand, and D. Sornette, "Transient chaos in room acoustics.," *Chaos (Woodbury, N.Y.)* **3** no. 4, (Oct., 1993) 529–541.
- [35] A. Cozza, "The Role of Losses in the Definition of the Overmoded Condition for Reverberation Chambers and Their Statistics," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **53** no. 2, (May, 2011) 296–307.
- [36] L. Arnaut, "Operation of electromagnetic reverberation chambers with wave diffractors at relatively low frequencies," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **43** no. 4, (2001) 637–653.
- [37] O. Lundén and M. Bäckström, "How to avoid unstirred high frequency components in mode stirred reverberation chambers," in *Electromagnetic Compatibility, 2007. EMC 2007. IEEE International Symposium on*, pp. 1–4. 2007.
- [38] J.-I. Hong and C.-S. Huh, "OPTIMIZATION OF STIRRER WITH VARIOUS PARAMETERS IN REVERBERATION CHAMBER," *Progress In Electromagnetics Research* **104** (2010) 15–30.
- [39] C. Lemoine, P. Besnier, and M. Drissi, "Effect of the size of the antenna on measurements distribution in reverberation chamber," in *2007 18th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*, vol. i, pp. 461–464. IEEE, Sept., 2007.
- [40] P. Johnson and K. Goldsmith, "An experimental study of the placement an aircraft inside a large welded zinc-plated steel electromagnetic reverberation chamber," in *17th DASC. AIAA/IEEE/SAE. Digital Avionics Systems Conference. Proceedings (Cat. No.98CH36267)*, vol. 1, pp. D57/1–D57/9. IEEE, 1998.

- [41] L. Arnaut, “Compound Exponential Distributions for Undermoded Reverberation Chambers,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions* ... **44** no. 3, (2002) 442–457.
- [42] G. Orjubin, E. Richalot, S. Mengue, and O. Picon, “Statistical Model of an Undermoded Reverberation Chamber,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **48** no. 1, (Feb., 2006) 248–251.
- [43] L. R. Arnaut, M. I. Andries, J. Sol, and P. Besnier, “Evaluation Method for the Probability Distribution of the Quality Factor of Mode-Stirred Reverberation Chambers,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **62** no. 8, (Aug., 2014) 4199–4208.
- [44] M. Otterskog, “The influence of stirrer size and chamber load on the number of uncorrelated samples created in a reverberation chamber,” in *Proceedings of EMC Zürich 2005*, no. 1, pp. 5–8. 2005.
- [45] J. Clegg, A. Marvin, J. Dawson, and S. Porter, “Optimization of Stirrer Designs in a Reverberation Chamber,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **47** no. 4, (Nov., 2005) 824–832.
- [46] F. Weeks and K. Goldsmith, “Design philosophy and material choice for a tuner in an electromagnetic reverberation chamber,” tech. rep., Technical Note DSTO-TN-0257, 2000.
- [47] N. Wellander, O. Lunden, and M. Backstrom, “Design parameters for efficient stirring of reverberation chambers,” in *2006 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, 2006. EMC 2006.*, pp. 263–268. IEEE, 2006.
- [48] H. Kuttruff, *Room acoustics*. Taylor & Francis, 2000.
- [49] P. Morse and R. Bolt, “Sound Waves in Rooms,” *Reviews of modern physics* (1944) . <http://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.16.69>.
- [50] E. Godfrey, “Reverberation chambers at low frequencies,” in *1999 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility. Symposium Record (Cat. No.99CH36261)*, vol. 1, pp. 23–28. IEEE, 1999.
- [51] P. Corona, J. Ladbury, and G. Latmiral, “Reverberation-chamber research-then and now : a review of early work and comparison with current understanding,” *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on* **44** no. 1, (2002) 87–94.
- [52] U. Dörr, H.-J. Stöckmann, M. Barth, and U. Kuhl, “Scarred and chaotic field distributions in a three-dimensional Sinai-microwave resonator,” *Physical Review Letters* **80** no. 5, (Feb., 1998) 1030–1033.
- [53] G. Orjubin, E. Richalot, O. Picon, and O. Legrand, “Wave chaos techniques to analyze a modeled reverberation chamber,” *Comptes Rendus Physique* **10** no. 1, (Jan., 2009) 42–53.
- [54] M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (eds.), *Les Houches 1989- Session LII : Chaos and quantum physics*. North-Holland, 1991.
- [55] S. Tomsovic and M. Brown, “Ocean acoustics : A novel laboratory for wave chaos,” in *New Directions in Linear Acoustics and Vibration* ... , M. Wright and

- R. Weaver (eds.), ch. 11, pp. 169–183. Cambridge University Press, 2010. <http://www.physics.wsu.edu/research/QuantumChaos/papers/10CUPchap.pdf>.
- [56] H.-J. Stöckmann and J. Stein, "Quantum" Chaos in Billiards Studied by Microwave Absorption," *Physical Review Letters* **64** no. 19, (1990) 2215–2218.
  - [57] J. Stein and H.-J. Stöckmann, "Experimental determination of billiard wave functions," *Physical Review Letters* **68** no. 19, (May, 1992) 2867–2870.
  - [58] M. V. Berry, "Regular and irregular semiclassical wavefunctions," *Journal of Physics A : Mathematical and General* **10** no. 12, (1977) 2083.
  - [59] O. Bohigas, M. Giannoni, and C. Schmit, "Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws," *Physical Review Letters* **52** no. 1, (1984) 1–4.
  - [60] O. Bohigas and M.-J. Giannoni, "Chaotic motion and random matrix theories," in *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics*, J. S. Dehesa, J. M. G. Gomez, and A. Polls (eds.), vol. 209 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 1–99. Springer Berlin Heidelberg, 1984.
  - [61] H. J. Stoeckmann, *Quantum Chaos : An Introduction*. Cambridge University Press, 1999.
  - [62] F. Mortessagne, *Dynamique et interferences geometriques dans les billards chaotiques. Application a l'acoustique des salles*. PhD thesis, 1994. <http://www.theses.fr/1994PA077274>.
  - [63] Y. G. Sinai, "Dynamical systems with elastic reflections," *Russian Mathematical Surveys* **25** no. 2, (Apr., 1970) 137–189.
  - [64] Y. G. Bunimovich, L. A. Sinai, "ON BILLIARDS CLOSE TO DISPERSING," *Mathematics of the USSR-Sbornik* **23** no. 1, (Feb., 1974) 45–67.
  - [65] L. A. Bunimovich, "On ergodic properties of certain billiards," *Functional Analysis and Its Applications* **8** no. 3, (1975) 254–255.
  - [66] G. Benettin and J. Strelcyn, "Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region : Stochastic transition and entropy," *Physical Review A* **17** no. 2, (Feb., 1978) 773–785.
  - [67] M. V. Berry, "Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'," *European Journal of Physics* **2** no. 2, (Apr., 1981) 91–102.
  - [68] L. A. Bunimovich, G. Casati, and I. Guarneri, "Chaotic Focusing Billiards in Higher Dimensions," *Physical Review Letters* **77** no. 14, (Sept., 1996) 2941–2944.
  - [69] L. A. Bunimovich and J. Rehacek, "Nowhere dispersing 3D billiards with non-vanishing Lyapunov exponents," *Communications in mathematical physics* **757** (1997) 729–757.
  - [70] L. A. Bunimovich and J. Rehacek, "On the ergodicity of many-dimensional focusing billiards," *Annales de l'IHP Physique théorique* **4** (1998) 421–448.



- [71] V. Lopac and a. Šimić, “Chaotic properties of the truncated elliptical billiards,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **16** no. 1, (Jan., 2011) 309–323.
- [72] J. Hannay and R. McCraw, “Barrier billiards—a simple pseudointegrable system,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **23** no. 6, (Mar., 1999) 887–900.
- [73] O. Legrand and F. Mortessagne, “Wave chaos for the helmholtz equation,” in *New Directions in Linear Acoustics and Vibration : Quantum Chaos, Random Matrix Theory and Complexity*, M. Wright and R. Weaver (eds.), ch. 2, pp. 24–41. Cambridge University Press, 2010.
- [74] E. P. Wigner, “Results and Theory of Resonance Absorption,” in *Gatlinburg Conference on Neutron Physics by Time-of-Flight*, p. 59. 1956.
- [75] N. Rosenzweig and C. Porter, “"Repulsion of Energy Levels" in Complex Atomic Spectra,” *Physical Review* **120** no. 5, (Dec., 1960) 1698–1714.
- [76] F. Haake, *Quantum signatures of chaos*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, third ed., 2010.
- [77] O. Bohigas, “Random matrix theories and chaotic dynamics,” in *Les Houches 1989- Session LII : Chaos and quantum physics*, M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (eds.), ch. 2. North-Holland, 1991.
- [78] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, “Random-matrix theories in quantum physics : common concepts,” *Physics Reports* **299** no. 4-6, (June, 1998) 189–425.
- [79] A. Richter, “Playing billiards with microwaves — quantum manifestations of classical chaos,” in *Emerging Applications of Number Theory*, D. Hejhal, J. Friedman, M. Gutzwiller, and A. Odlyzko (eds.), vol. 109 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pp. 479–523. Springer New York, 1999.
- [80] E. Heller, “Bound-State Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems : Scars of Periodic Orbits,” *Physical Review Letters* **53** no. 16, (Oct., 1984) 1515–1518.
- [81] E. Heller, “Wavepacket dynamics and quantum chaology,” in *Les Houches 1989- Session LII : Chaos and quantum physics*, M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (eds.), ch. 9. North-Holland, 1991.
- [82] V. Doya, O. Legrand, F. Mortessagne, and C. Miniatura, “Light Scarring in an Optical Fiber,” *Physical Review Letters* **88** no. 1, (Dec., 2001) 014102.
- [83] E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*, ch. 3. Cambridge University Press, 2007.
- [84] P. So, S. Anlage, E. Ott, and R. Oerter, “Wave Chaos Experiments with and without Time Reversal Symmetry : GUE and GOE Statistics,” *Physical Review Letters* **74** no. 14, (Apr., 1995) 2662–2665.
- [85] H. Alt, H.-D. Gräf, T. Guhr, H. L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, a. Richter, and P. Schardt, “Correlation-hole method for the spectra of superconducting microwave billiards,” *Physical Review E* **55** no. 6, (June, 1997) 6674–6683.

- [86] J. Wiersig, “Spectral properties of quantized barrier billiards,” *Physical Review E* **65** no. 4, (Apr., 2002) 046217.
- [87] D. Laurent, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Diffractive orbits in the length spectrum of a two-dimensional microwave cavity with a small scatterer,” *Physical Review E* **74** no. 4, (Oct., 2006) 046219.
- [88] M. V. Berry and M. Tabor, “Level Clustering in the Regular Spectrum,” *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **356** no. 1686, (Sept., 1977) 375–394.
- [89] M. Dennis, “Gaussian RandomWavefields and the Ergodic Mode Hypothesis,” in *New Directions in Linear Acoustics and Vibration : Quantum Chaos, Random Matrix Theory and Complexity*, M. Wright and R. Weaver (eds.), ch. 4, pp. 59–76. Cambridge University Press, 2010.
- [90] H. Alt, H. Gräf, H. L. Harney, R. Hofferbert, H. Lengeler, A. Richter, P. Schardt, and H. Weidenmüller, “Gaussian Orthogonal Ensemble Statistics in a Microwave Stadium Billiard with Chaotic Dynamics : Porter-Thomas Distribution and Algebraic Decay of Time Correlations,” *Physical Review Letters* **74** no. 1, (Jan., 1995) 62–65.
- [91] M. Gutzwiller, “The Semi-Classical Quantization of Chaotic Hamiltonian Systems,” in *Les Houches 1989- Session LII : Chaos and quantum physics*, M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (eds.), ch. 3, pp. 201–249. North-Holland, 1991.
- [92] U. Kuhl, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Microwave experiments using open chaotic cavities in the realm of the effective Hamiltonian formalism,” *Fortschritte der Physik* **61** no. 2-3, (Feb., 2013) 404–419.
- [93] H. Alt, C. Dembowski, H. Gräf, and R. Hofferbert, “Wave dynamical chaos in a superconducting three-dimensional sinai billiard,” *Physical Review Letters* **79** (1997) 1026–1029.
- [94] C. Dembowski, B. Dietz, H. D. Graef, A. Heine, T. Papenbrock, A. Richter, and C. Richter, “Experimental Test of a Trace Formula for a Chaotic Three Dimensional Microwave Cavity,” *Physical Review Letters* **89** no. 6, (July, 2002) 4.
- [95] S. Deus, P. M. Koch, and L. Sirko, “Statistical properties of the eigenfrequency distribution of three-dimensional microwave cavities,” *Physical Review E* **52** no. 1, (July, 1995) 1146–1155.
- [96] J.-B. Gros, O. Legrand, F. Mortessagne, E. Richalot, and K. Selemeni, “Universal behaviour of a wave chaos based electromagnetic reverberation chamber,” *Wave Motion* **51** no. 4, (June, 2014) 664–672.
- [97] W. Lukosz, “Electromagnetic zero-point energy shift induced by conducting surfaces,” *Zeitschrift für Physik* **262** no. 4, (Aug., 1973) 327–348.
- [98] G. Tanner, “How chaotic is the stadium billiard ? A semiclassical analysis,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **30** (1997) 2863–2888.

- [99] A. Bäcker, R. Schubert, and P. Stifter, “On the number of bouncing ball modes in billiards,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **30** no. 19, (Oct., 1997) 6783–6795.
- [100] J. B. Gros, U. Kuhl, O. Legrand, F. Mortessagne, O. Picon, and E. Richalot, “Statistics of the electromagnetic response of a chaotic reverberation chamber,” [arXiv:1409.5863](https://arxiv.org/abs/1409.5863).  
<http://arxiv.org/abs/1409.5863v1><http://arxiv.org/abs/1409.5863>.
- [101] J. Verbaarschot, H. Weidenmüller, and M. Zirnbauer, “Grassmann integration in stochastic quantum physics : The case of compound-nucleus scattering,” *Physics Reports* **129** no. 6, (Dec., 1985) 367–438.
- [102] V. Sokolov and V. Zelevinsky, “Dynamics and statistics of unstable quantum states,” *Nuclear Physics A* **504** no. 3, (Nov., 1989) 562–588.
- [103] V. Sokolov and V. Zelevinsky, “Collective dynamics of unstable quantum states,” *Annals of Physics* **216** no. 2, (June, 1992) 323–350.
- [104] J. Okołowicz, M. Płoszajczak, and I. Rotter, “Dynamics of quantum systems embedded in a continuum,” *Physics Reports* **374** no. 4-5, (Feb., 2003) 271–383.
- [105] I. Rotter, “A non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **42** no. 15, (Apr., 2009) 153001.
- [106] F.-m. Dittes, “The decay of quantum systems with a small number of open channels,” *Physics Reports* **339** no. 4, (Dec., 2000) 215–316.
- [107] J. Barthélemy, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Complete S matrix in a microwave cavity at room temperature,” *Physical Review E* **71** no. 1, (Jan., 2005) 016205.
- [108] D. V. Savin, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Inhomogeneous losses and complexness of wave functions in chaotic cavities,” *Europhysics Letters (EPL)* **76** no. 5, (Dec., 2006) 774–779.
- [109] Y. V. Fyodorov, D. V. Savin, and H.-J. Sommers, “Scattering, reflection and impedance of waves in chaotic and disordered systems with absorption,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **38** no. 49, (Dec., 2005) 10731–10760.
- [110] U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, and R. Weaver, “Classical wave experiments on chaotic scattering,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **38** no. 49, (Dec., 2005) 10433–10463.
- [111] C. Poli, *Chaos ondulatoire en milieux ouverts : Approche statistique par la théorie des matrices aléatoires non-hermitiennes*. PhD thesis, 2009.  
<http://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00440506/>.
- [112] E. Persson, I. Rotter, H.-J. Stöckmann, and M. Barth, “Observation of resonance trapping in an open microwave cavity,” *Physical Review Letters* **85** no. 12, (Sept., 2000) 2478–81.
- [113] R. Pnini and B. Shapiro, “Intensity fluctuations in closed and open systems,” *Physical Review. E* **54** no. 2, (Aug., 1996) R1032–R1035.



- [114] Y.-H. Kim, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, and P. Brouwer, “Measurement of Long-Range Wave-Function Correlations in an Open Microwave Billiard,” *Physical Review Letters* **94** no. 3, (Jan., 2005) 036804.
- [115] A. F. Sadreev and K.-F. Berggren, “Signatures of quantum chaos in complex wavefunctions describing open billiards,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **38** no. 49, (Dec., 2005) 10787–10804.
- [116] H.-J. Sommers, Y. V. Fyodorov, and M. Titov, “S -matrix poles for chaotic quantum systems as eigenvalues of complex symmetric random matrices : from isolated to overlapping resonances,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **32** no. 5, (Feb., 1999) L77–L85.
- [117] U. Kuhl, R. Höhmann, J. Main, and H.-J. Stöckmann, “Resonance Widths in Open Microwave Cavities Studied by Harmonic Inversion,” *Physical Review Letters* **100** no. 25, (June, 2008) 254101.
- [118] C. Poli, G. a. Luna-Acosta, and H.-J. Stöckmann, “Nearest Level Spacing Statistics in Open Chaotic Systems : Generalization of the Wigner Surmise,” *Physical Review Letters* **108** no. 17, (Apr., 2012) 174101.
- [119] B. Dietz, A. Heine, A. Richter, O. Bohigas, and P. Leboeuf, “Spectral statistics in an open parametric billiard system,” *Physical Review E* **73** no. 3, (Mar., 2006) 035201.
- [120] C. Poli, B. Dietz, O. Legrand, F. Mortessagne, and A. Richter, “Avoided-level-crossing statistics in open chaotic billiards,” *Physical Review. E* **80** no. 3 Pt 2, (Sept., 2009) 035204.
- [121] U. Kuhl, “Wave functions, nodal domains, flow, and vortices in open microwave systems,” *The European Physical Journal Special Topics* **145** no. 1, (June, 2007) 103–123.
- [122] C. Poli, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Statistics of resonance states in a weakly open chaotic cavity with continuously distributed losses,” *Physical Review E* **82** no. 5, (Nov., 2010) 055201.  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.055201>.
- [123] S. A. van Langen, P. W. Brouwer, and C. W. J. Beenakker, “Fluctuating phase rigidity for a quantum chaotic system with partially broken time-reversal symmetry,” *Physical Review E* **55** no. 1, (Jan., 1997) R1–R4.  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.55.R1>.
- [124] P. W. Brouwer, “Wave function statistics in open chaotic billiards,” *Physical Review E* **68** no. 4, (Oct., 2003) 046205.  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.046205>.
- [125] O. I. Lobkis and R. L. Weaver, “Complex modal statistics in a reverberant dissipative body,” *The Journal of the Acoustical Society of America* **108** no. 4, (Oct., 2000) 1480–5. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11051474>.
- [126] J. Barthélemy, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Inhomogeneous resonance broadening and statistics of complex wave functions in a chaotic microwave

- cavity,” *Europhysics Letters (EPL)* **70** no. 2, (Apr., 2005) 162–168.  
<http://stacks.iop.org/0295-5075/70/i=2/a=162?key=crossref.f57d1d4317722d8f5428515c4bd993ec>.
- [127] C. Poli, D. V. Savin, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Statistics of resonance states in open chaotic systems : A perturbative approach,” *Physical Review E* **80** no. 4, (Oct., 2009) 046203.  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.80.046203>.
- [128] S. Kumar, A. Nock, H.-J. Sommers, T. Guhr, B. Dietz, M. Miski-Oglu, A. Richter, and F. Schäfer, “Distribution of Scattering Matrix Elements in Quantum Chaotic Scattering,” *Physical Review Letters* **111** no. 3, (July, 2013) 030403.
- [129] A. Nock, S. Kumar, H.-J. Sommers, and T. Guhr, “Distributions of off-diagonal scattering matrix elements : Exact results,” *Annals of Physics* **342** (Mar., 2014) 103–132.
- [130] Y. V. Fyodorov and H. J. Sommers, “Statistics of S-matrix poles in few-channel chaotic scattering : Crossover from isolated to overlapping resonances,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **63** no. 12, (June, 1996) 1026–1030, [arXiv:cond-mat/9507117](http://arxiv.org/abs/cond-mat/9507117).
- [131] K. Życzkowski and G. Lenz, “Eigenvector statistics for the transitions from the orthogonal to the unitary ensemble,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **82** no. 2, (June, 1991) 299–303.
- [132] E. Bulgakov, I. Rotter, and A. Sadreev, “Phase rigidity and avoided level crossings in the complex energy plane,” *Physical Review E* **74** no. 5, (Nov., 2006) 056204.
- [133] J. Wiersig and J. Main, “Fractal Weyl law for chaotic microcavities : Fresnel’s laws imply multifractal scattering,” *Physical Review E* **77** no. 3, (Mar., 2008) 036205.  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.77.036205>  
<http://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.77.036205>.
- [134] J. B. Gros, U. Kuhl, O. Legrand, F. Mortessagne, E. Richalot, and D. V. Savin, “Experimental width shift distribution : a test of nonorthogonality for local and global perturbations,” *to be published in Physical Review Letters* (Aug., 2014) 5, [arXiv:1408.6472](http://arxiv.org/abs/1408.6472). <http://arxiv.org/abs/1408.6472>.
- [135] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. ed., 1999.  
<http://cdsweb.cern.ch/record/490457>.
- [136] T. B. A. Senior, “Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces,” *Applied Scientific Research, Section B* **8** no. 1, (Dec., 1960) 418–436.  
<http://link.springer.com/article/10.1007/BF02920074>  
<http://link.springer.com/10.1007/BF02920074>.
- [137] A. Mohsen, “On the impedance boundary condition,” *Applied Mathematical Modelling* **6** no. September 1981, (1982) 1981–1983.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X82801091>.
- [138] S. Chen, T. Tang, and Z. Wang, “The method of approximate impedance boundary conditions for the analysis of acoustic waves in a plate or substrate with

- piezoelectric films,” *Physics Letters A* **362** no. 5-6, (Mar., 2007) 357–359.  
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0375960106016495>.
- [139] J. B. Gros, U. Kuhl, O. Legrand, and F. Mortessagne, “Effectiveness of random matrix theory for the universal statistical behavior of the response of three-dimensional lossy chaotic electromagnetic reverberation chambers,” *article en préparation*.
- [140] J. Bausch, “On the efficient calculation of a linear combination of chi-square random variables with an application in counting string vacua,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **46** no. 50, (Dec., 2013) 505202.  
<http://stacks.iop.org/1751-8121/46/i=50/a=505202?key=crossref.5115e6eb3e93be0793266a8e5c9a7cff>.
- [141] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman, and M. Znidaric, “Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay,” *Physics Reports* **435** no. 2-5, (Nov., 2006) 33–156.  
<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370157306003310>.
- [142] M. Barth, U. Kuhl, and H.-J. Stoeckmann, “Global versus Local Billiard Level Dynamics : The Limits of Universality,” *Physical Review Letters* **82** no. 10, (Mar., 1999) 2026–2029.
- [143] Y. V. Fyodorov and D. V. Savin, “Statistics of Resonance Width Shifts as a Signature of Eigenfunction Nonorthogonality,” *Physical Review Letters* **108** no. 18, (May, 2012) 184101.  
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.184101>.
- [144] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, *Phys. Rep.* **129**, 367 (1985).
- [145] V. V. Sokolov and V. G. Zelevinsky, *Nucl. Phys. A* **504**, 562 (1989).
- [146] Y. V. Fyodorov and H.-J. Sommers, *J. Math. Phys.* **38**, 1918 (1997).
- [147] I. Rotter, *J. Phys. A : Math. Theor.* **42**, 153001 (2009).
- [148] V. V. Sokolov, I. Rotter, D. V. Savin, and M. Müller, *Phys. Rev. C* **56**, 1044 (1997).
- [149] D. V. Savin and V. V. Sokolov, *Phys. Rev. E* **56**, R4911 (1997).
- [150] H. Schomerus, K. M. Frahm, M. Patra, and C. W. J. Beenakker, *Physica A* **278**, 469 (2000).
- [151] P. W. Brouwer, *Phys. Rev. E* **68**, 046205 (2003).
- [152] Y.-H. Kim, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, and P. W. Brouwer, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 036804 (2005).
- [153] E. N. Bulgakov, I. Rotter, and A. F. Sadreev, *Phys. Rev. E* **74**, 056204 (2006).
- [154] D. V. Savin, O. Legrand, and F. Mortessagne, *Europhys. Lett.* **76**, 774 (2006).
- [155] C. Poli, D. V. Savin, O. Legrand, and F. Mortessagne, *Phys. Rev. E* **80**, 046203 (2009).
- [156] O. I. Lobkis and R. L. Weaver, *J. Acoust. Soc. Am.* **108**, 1480 (2000).

- [157] O. Xeridat, C. Poli, O. Legrand, F. Mortessagne, and P. Sebbah, Phys. Rev. E **80**, 035201(R) (2009).
- [158] J. Wiersig, S. W. Kim, and M. Hentschel, Phys. Rev. A **78**, 053809 (2008); J. Wiersig, *ibid.* **84**, 063828 (2011).
- [159] N. Bachelard, C. Garay, J. Arlandis, R. Touzani, and P. Sebbah (2014), preprint arXiv :1407.8220.
- [160] Y. V. Fyodorov and D. V. Savin, Phys. Rev. Lett. **108**, 184101 (2012).
- [161] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer-Verlag, New York, 1966).
- [162] J. T. Chalker and B. Mehlig, Phys. Rev. Lett. **81**, 3367 (1998).
- [163] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
- [164] Y. V. Fyodorov and D. V. Savin, in *Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, edited by G. Akemann, J. Baik, and P. Di Francesco (Oxford University Press, UK, 2011), pp. 703–722; arXiv :1003.0702.
- [165] I. L. Aleiner and K. A. Matveev, Phys. Rev. Lett. **80**, 814 (1998).
- [166] F. M. Marchetti, I. E. Smolyarenko, and B. D. Simons, Phys. Rev. E **68**, 036217 (2003).
- [167] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **51**, 13403 (1995).
- [168] M. Barth, U. Kuhl, and H.-J. Stöckmann, Phys. Rev. Lett. **82**, 2026 (1999a).
- [169] For example, one finds  $\phi_2^{(\text{loc})}(y) = \frac{1}{3}[\sqrt{\pi}e^{y^2}\text{erfc}(|y|)(2y^4 + 7y^2 + 2) - 2|y|(y^2 + 3)]$  at  $r=2$  (one movable scatterer).
- [170] D. V. Savin and J.-B. De Vaulx, Acta Phys. Pol. A **124**, 1074 (2013).
- [171] H.-J. Stöckmann and J. Stein, Phys. Rev. Lett. **64**, 2215 (1990); J. Stein and H.-J. Stöckmann, Phys. Rev. Lett. **68**, 2867 (1992).
- [172] M. Barth, U. Kuhl, and H.-J. Stöckmann, Ann. Phys. (Leipzig) **8**, 733 (1999b).
- [173] B. Köber, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, T. Gorin, D. V. Savin, and T. H. Seligman, Phys. Rev. E **82**, 036207 (2010).
- [174] C. Poli, O. Legrand, and F. Mortessagne, Phys. Rev. E **82**, 055201(R) (2010).
- [175] U. Kuhl, O. Legrand, and F. Mortessagne, Fortschritte der Physik **61**, 404 (2013).
- [176] J.-B. Gros, O. Legrand, F. Mortessagne, E. Richalot, and K. Selemeni, Wave Motion **51**, 664 (2014).
- [177] U. Kuhl, R. Höhmann, J. Main, and H.-J. Stöckmann, Phys. Rev. Lett. **100**, 254101 (2008).
- [178] Note that we fitted  $\kappa$  using the distribution as we were not able to extract its value by Eq. (5.8), due to a frequency dependent phase induced by the antennas.
- [179] J.-B. Gros, U. Kuhl, O. Legrand, F. Mortessagne, O. Picon, and E. Richalot, arXiv :1409.5863 (2014b).
- [180] This estimate is based on (5.2), but remains valid also for reasonably moderate modal overlap [174]; see further J.-B. Gros, U. Kuhl, O. Legrand, and F. Mortessagne, in preparation.

# Annexe A

## Dérivation du *Wigner Surmise*

Cette annexe présente la dérivation du Wigner Surmise à partir de la distribution des valeurs propres des matrices GOE. Pour alléger les notations, on omettra les bornes d'intégrations qui vont de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

On suppose donc un ensemble de matrices GOE  $2 \times 2$ . On note les valeurs propres de ces matrices  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ . La distribution jointe de ces valeurs propres est donné par l'équation (1.21) en prenant  $N = 2$ ,

$$P(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = C_2 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \exp [-A(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)] \quad (\text{A.1})$$

ou  $A = (4\zeta^2)^{-1}$ . La distribution des écarts  $s = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ , est défini par

$$P_{\text{Wigner}}(s) = \langle \delta(s - |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \rangle \quad (\text{A.2})$$

et s'écrit alors en fonction de  $P(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  :

$$\begin{aligned} P_{\text{Wigner}}(s) &= \int \int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 P(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \delta(s - |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \\ &= \int \int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 C_2 \exp [-A(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)] |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \delta(s - |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Puis, on applique le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ v = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \\ \varepsilon_2 = \frac{u}{2} - \frac{v}{2} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

dont le Jacobien  $\det(J) = |\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2)/\partial(u, v)|$  est :

$$\det(J) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2 \quad (\text{A.5})$$

Donc (A.3) devient :

$$P_{\text{Wigner}}(s) = C_2 \int \int du dv |\det(J)| |v| \exp \left[ -\frac{A}{4} \{ (u+v)^2 + (u-v)^2 \} \right] \delta(s - |v|) \quad (\text{A.6})$$

Or on a  $(u+v)^2 + (u-v)^2 = 2u^2 + 2v^2$ , donc

$$P(s) = \frac{C_2}{2} \left( \int \exp \left( -\frac{A}{4} u^2 \right) du \right) \left( \int |v| \exp \left( -\frac{A}{2} v^2 \right) \delta(|v| - s) dv \right) \quad (\text{A.7})$$

$$P(s) = \frac{\sqrt{\pi} C_2}{\sqrt{A}} s \exp \left( -\frac{A}{2} s^2 \right) \quad (\text{A.8})$$

La constante  $A$  fixe l'espacement moyen  $\langle s \rangle$  tandis que  $C_2$  est une constante de normalisation. Comme on souhaite obtenir la distribution du spectre normalisé, il faut que  $\langle s \rangle = 1$ .

Ainsi pour déterminer  $A$  et  $C_2$ , on résout :

$$\int_0^{+\infty} P_{\text{Wigner}}(s) ds = \frac{\sqrt{\pi} C_2}{A^{3/2}} = 1 \quad (\text{A.9})$$

et

$$\int_0^{+\infty} s P_{\text{Wigner}}(s) ds = \frac{\pi C_2}{\sqrt{2} A^2} = 1 \quad (\text{A.10})$$

On trouve alors  $C_2 = \pi/(2\sqrt{2})$  et  $A = \pi/2$ , ce qui implique que :

$$\boxed{P_{\text{Wigner}}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right)} \quad . \quad (\text{A.11})$$





## Annexe B

### Corrélation à deux points pour les matrices GOE

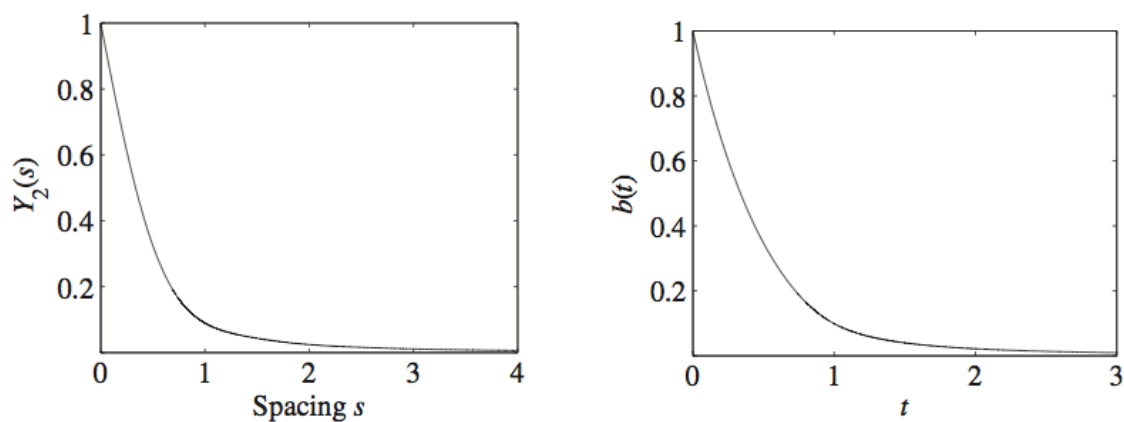


FIGURE B.1 – Figures provenant de la référence [1]. À gauche :  $Y_{2\text{GOE}}$ . À droite :  $b_{2\text{GOE}}(t)$

**Facteur de forme  $b_{2\text{GOE}}(t)$  :**

$$b_{2\text{GOE}}(t) = \begin{cases} 1 + 2|t| + |t| \ln(1 + 2|t|) & \text{si } |t| < 1 \\ -1 + |t| \ln\left(\frac{2|t|+1}{2|t|-1}\right) & \text{si } |t| > 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

**Two level cluster function**  $Y_{2\text{GOE}}(x)$  :

$$Y_{2\text{GOE}}(x) = S^2(x) - [\text{Si}(\pi x) - \pi\epsilon(x)] \left( \frac{\cos(\pi x)}{\pi x} - \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2 x^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

avec

$$S(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(y)}{y} dy \quad (\text{B.4})$$

et

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1/2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

**Number variance**  $\Sigma_{\text{GOE}}^2(L)$  :

$$\Sigma_{\text{GOE}}^2(L) = 2\Sigma_2^2(L) + [\text{Si}(\pi L)/\pi]^2 - [\text{Si}(\pi L)/\pi] \quad (\text{B.6})$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_2^2(L) = & \pi^{-2} [\ln(2\pi L) + \gamma_E + 1 - \cos(2\pi L) - \text{Ci}(2\pi L)] \cdots \\ & \cdots + L \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \text{Si}(2\pi) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où  $\gamma_E = 0.5772\dots$  est la constante d'Euler et  $\text{Ci}(x)$  est définie par

$$\text{Ci}(x) = \gamma_E + \ln(x) - \int_0^x \frac{1 - \cos(y)}{y} dy \quad (\text{B.8})$$

## Annexe C

# Rappels sur la représentation spatiale des opérateurs

On note  $\vec{r}$  le vecteur position dans un espace euclidien  $\Omega$  de dimension  $d = 1, 2$  ou  $3$ .  $|\vec{r}\rangle$  est un vecteur propre de l'opérateur position  $\hat{R}$  vérifiant  $\hat{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}|\vec{r}\rangle$ . Un élément important est de se rappeler que l'opérateur identité s'écrit :

$$\mathbb{1} = \int_{\Omega} d\vec{r}' |\vec{r}'\rangle \langle \vec{r}'| \quad (\text{C.1})$$

Dans le tableau suivant  $\lambda$  représente un paramètre (ou un ensemble de paramètres) autre que la position.

Représentation de Dirac	Représentation spatiale
Vecteur : $ u\rangle$	fonction d'onde : $u(\vec{r}) = \langle \vec{r}   u \rangle$
Vecteur : $\langle u  $ (transposé conjugué de $ u\rangle$ )	fonction d'onde conjuguée : $u^*(\vec{r}) = \langle u   \vec{r} \rangle$
Opérateur : $\hat{A}(\lambda)$	$A(\vec{r}, \vec{r}', \lambda) = \langle \vec{r}   \hat{A}(\lambda)   \vec{r}' \rangle$
Produit scalaire : $\langle w   u \rangle$	$\int_{\Omega} d\vec{r} w^*(\vec{r}) u(\vec{r})$
Action d'un opérateur $\hat{A}(\lambda)   u \rangle$	$\int_{\Omega} d\vec{r}' A(\vec{r}, \vec{r}', \lambda) u(\vec{r}')$

Un exemple :

Supposons une onde se propageant librement dans un domaine  $\Omega$  délimité par  $\partial\Omega$  (typiquement une cavité). Les conditions au bord sur  $\partial\Omega$  sont supposées quelconques. L'opérateur hamiltonien  $\mathcal{H}$  associé à ce problème a pour représentation spatiale

$$\langle \vec{r} | \mathcal{H} | \vec{r}' \rangle = -\Delta_{\vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{C.2})$$

La recherche des états propres de  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} |\Psi_n\rangle = \varepsilon_n |\Psi_n\rangle \quad (\text{C.3})$$

s'écrit donc en représentation spatiale (après avoir fait le changement de variable  $\varepsilon_n \rightarrow k_n^2$ )

$$\int_{\Omega} d\vec{r}' -\Delta_{\vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \Psi_n(\vec{r}') = -\Delta_{\vec{r}} \Psi_n(\vec{r}) = k_n^2 \Psi_n(\vec{r}) \quad (\text{C.4})$$

où  $\Psi_n(\vec{r})$  est le champ propre propre vérifiant l'équation d'Helmholtz (C.4) dans  $\Omega$  et les conditions aux bords sur  $\partial\Omega$ . On notera que le problème n'est pas nécessairement auto-adjoint puisque cette propriété dépend des conditions aux bords.

## Annexe D

# Nombre de canaux liés à des pertes par absorption

Les calculs présentés dans cette annexe permettent d'estimer l'ordre de grandeur du nombre de canaux de fuites associés à des pertes par absorption sur une surface  $S$  ou une longueur  $L$ . Ils ne sont valides que lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  est petite devant la taille caractéristique de la zone de perte :

$$\lambda^2 \ll S \text{ ou } \lambda \ll L \tag{D.1}$$

Les calculs suivants reposent sur une combinaison entre la loi de Sabine, couramment utilisée en acoustique des salles [34] pour estimer le temps de réverbération en fonction de l'absorption moyenne des murs, et la loi de Weisskopf [102, 108], couramment utilisée en physique nucléaire pour exprimer la largeur moyenne des résonances en fonction du nombre de canaux et de leur coefficient de transmission moyen.

## D.1 Absorption par une surface S

On suppose une cavité de volume  $V$  présentant des pertes par absorption sur une surface  $S$ . Le coefficient d'absorption moyen est noté  $\bar{\alpha}$ . En supposant que l'absorption entraîne une décroissance exponentielle de l'énergie dans la cavité :

$$E(t) = E_0 \exp(-t/\tau) \quad (\text{D.2})$$

la loi de Sabine permet d'exprimer le temps de décroissance en fonction de  $\bar{\alpha}$  (supposé  $\ll 1$ ) [34, 126] :

$$\tau = -\frac{4V}{cS} \frac{1}{\ln(1 - \bar{\alpha})} \simeq \frac{4V}{cS \bar{\alpha}} \quad (\text{D.3})$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde. On pose  $\bar{\Gamma}^\omega = 1/\tau$  la largeur moyenne en pulsation<sup>1</sup>. La loi de Weisskopf s'écrit [108] :

$$\bar{\Gamma}^\omega = M \langle T \rangle \frac{\Delta^\omega}{2\pi} \quad (\text{D.4})$$

avec  $M$  le nombre de canaux de fuite,  $\langle T \rangle$  leur coefficient de transmission moyenne, et  $\Delta^\omega$  la distance moyenne entre centre de résonance exprimée en  $\omega$ . En posant  $\Delta^f = \Delta^\omega/2\pi$ , la distance moyenne entre résonances en échelle de fréquence,  $\bar{\alpha} = \langle T \rangle$  et en combinant les équations (D.3) et (D.4), on obtient :

$$M = \frac{cS}{4V} \frac{1}{\Delta^f} \quad (\text{D.5})$$

Comme  $\Delta^f$  est reliée à la densité moyenne d'états  $\bar{\varrho}(f)$  par  $\bar{\varrho}(f) = (\Delta^f)^{-1}$  on peut, en utilisant la loi de Weyl du problème considéré, exprimer  $M$  en fonction de  $f$  :

$$\boxed{M = \frac{cS}{4V} \bar{\varrho}(f)} \quad (\text{D.6})$$

---

1. ie  $\omega = 2\pi f$  et la largeur en fréquences est donnée par  $\bar{\Gamma}^f = \bar{\Gamma}^\omega/2\pi$

## D.2 Absorption sur une longueur $L$

On suppose ici une cavité 2D de surface  $S$  et de périmètre  $P$  avec  $P = L$ . La loi de Sabine dans cette situation donne [\[34\]](#) :

$$\tau = \frac{\pi S}{cL\bar{\alpha}} \quad (\text{D.7})$$

d'où

$$M = \frac{\pi S}{cL} \bar{\varrho}(f) \quad (\text{D.8})$$

### Remarque

Lorsque  $\lambda^2 \sim S$  ou  $\lambda \sim L$ , il y a des effets de diffraction par les bords de la zone de perte qui viennent rajouter un nombre non négligeable de canaux à ceux prédits par les equations [\(D.6\)](#) et [\(D.8\)](#).

## Résumé

Les chambres réverbérantes à brassage de modes (CRBM) utilisées dans l'industrie pour tester l'immunité ou la susceptibilité des systèmes électroniques embarqués (avion, automobile, smartphone,...) vis-à-vis des ondes électromagnétiques (EM) présentes dans leur environnement. Les CRBM doivent toutes répondre à un certain nombre de critères statistiques fixés par une norme internationale. Le critère principal étant l'obtention d'un champ statistiquement uniforme et isotrope autour de l'objet sous test. Afin d'améliorer et de mieux maîtriser les propriétés statistiques de ces systèmes pour des fréquences proches de leur fréquence minimale d'utilisation, nous proposons de les rendre chaotiques afin de profiter des propriétés statistiques universelles des résonances des cavités chaotiques. Nous commencerons par montrer comment rendre chaotique, par des modifications simples, des chambres réverbérantes conventionnelles, et comment étendre les prédictions de la théorie des matrices aléatoire appliquée (TMA) à l'hamiltonien effectif, permettant de décrire les systèmes chaotiques ouverts, au cas de systèmes décrits par des champs vectoriels. Ensuite, nous comparerons, au moyen de simulations et d'expériences, les distributions d'intensité et les fluctuations des maxima du champ EM dans une CRBM conventionnelle et dans une CR chaotique au voisinage de la fréquence minimale d'utilisation. Ce travail illustre que les propriétés statistiques spectrales et spatiales universelles des CR chaotiques permettent de mieux répondre aux critères exigés par la norme internationale pour réaliser des tests de compatibilité électromagnétiques.

## Abstract

Mode-stirred reverberation chambers (RC) are used in the industry to test the immunity or the susceptibility of on-board electronic systems (plane, automobile, smartphone) towards the electromagnetic waves present in their environment. Mode-stirred RCs have to comply with a number of statistical criteria fixed by international standards. The chief criterion relies on a statistically uniform and isotropic field around the object under test. In order to improve and master the statistical properties of these systems for frequencies close to their lowest useable frequency, we suggest making them chaotic to take advantage of universal statistical properties of the resonances of chaotic cavities. We first show how to make chaotic RCs by simple modifications of a conventional RC and how to extend the predictions of the random matrix theory applied to the effective hamiltonien describing the open chaotic systems, to the case of vectorial fields. Then, we compare, by means of simulations and experiments, the distributions of intensity and the fluctuations of the maxima of the field in a conventional RC and in a chaotic RC close to the lowest useable frequency. This work illustrates that the universal spectral and spatial statistical properties of chaotic RCs allow to better comply with the criteria required by the international standards.